I. قابلية الاشتقاق في عدد

1. تعريف

نقول إن الدالة f قابلة الإشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ منتهية. l يسمى العدد المشتق ويرمز له بالرمز $f'(x_0)$

2. معادلة المماس لمنحنى الدالة –الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة

- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في عدد x_0 فإن منحناها يقبل مماسا في النقطة $M\left(x_0;f(x_0)\right)$

  معادلته $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

  تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة x_0

3. قابلية الاشتقاق على اليمين –قابلية الاشتقاق على اليسار

- نقول إن الدالة f قابلة الإشتقاق على يمين العدد x_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$

  منتهية. l يسمى العدد المشتق على اليمين ويرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$

- نقول إن الدالة f قابلة الإشتقاق على يسار العدد x_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$

  منتهية. l يسمى العدد المشتق على اليسار ويرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$

- f قابلة الإشتقاق في العدد x_0 إذا كانت $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

4. خاصية

كل دالة قابلة للإشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

5. ملاحظة

إذا كانت الدالة f قابلة الإشتقاق في x_0 فإن المنحنى يمر بشكل عادي من النقطة $M\left(x_0;f(x_0)\right)$

إذا كانت الدالة f غير قابلة الإشتقاق في x_0 فإن المنحنى ينكسر في النقطة $M\left(x_0;f(x_0)\right)$ و يكون زاوية

6. الاشتقاق على مجال

- تكون f قابلة للإشتقاق على مجال $]a;b[$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على جميع نقطه
- تكون f قابلة للإشتقاق على مجال $[a;b[$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على $]a;b[$ و على يمين a
- تكون f قابلة للإشتقاق على مجال $]a;b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على $]a;b[$ و على يسار b

II. دراسة إشارة دالة انطلاقا من جدول التغيرات

1. قيمة دنيا

إذا كان جدول تغيرات الدالة f على الشكل التالي

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	2	↗	

فإن الدالة f تقبل قيمة دنيا هي 2 أي

$$f(x) \geq 2$$

$$f(x) \geq 2 > 0$$

إذن $f(x) > 0$

2. قيمة قصوى

إذا كان جدول تغيرات الدالة f على الشكل التالي

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-1	↘	

فإن الدالة f تقبل قيمة قصوى هي -1 أي

$$f(x) \leq -1$$

$$f(x) \leq -1 < 0$$

إذن $f(x) < 0$

3. دراسة إشارة دالة تزايدية قطعا

إذا كان جدول تغيرات الدالة f على الشكل التالي

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

على المجال $]-\infty; x_0]$

$x \leq x_0$

بما أن f **دالة تزايدية قطعا**

$f(x) \leq f(x_0)$

$f(x) \leq 0$

على المجال $[x_0 ; +\infty[$

$x \geq x_0$

بما أن f **دالة تزايدية قطعا**

$f(x) \geq f(x_0)$

$f(x) \geq 0$

4. دراسة إشارة دالة تناقصية قطعا

إذا كان جدول تغيرات الدالة f على الشكل التالي

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

على المجال $]-\infty; x_0]$

$x \leq x_0$

بما أن f **دالة تناقصية قطعا**

$f(x) \geq f(x_0)$

$f(x) \geq 0$

على المجال $[x_0 ; +\infty[$

$x \geq x_0$

بما أن f **دالة تناقصية قطعا**

$f(x) \leq f(x_0)$

$f(x) \leq 0$

III.التأويلات الهندسية للا شتقاق

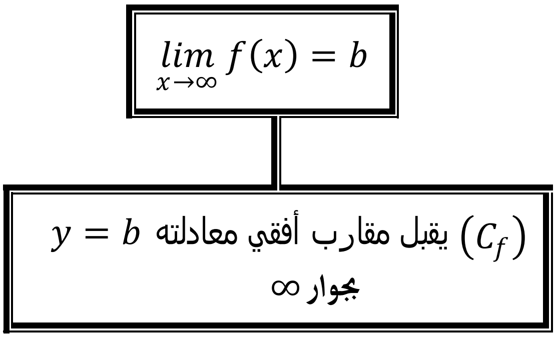
- $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
  - 0
    نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $M(x_0;f(x_0))$
  - $a\neq 0$
    نصف مماس على اليمين في النقطة $M(x_0;f(x_0))$ معادلته $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
  - $+\infty$
    نصف مماس عمودي في النقطة $M(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
  - $-\infty$
    نصف مماس عمودي في النقطة $M(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل

- $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
  - 0
    نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $M(x_0;f(x_0))$
  - $a\neq 0$
    نصف مماس على اليسارفي النقطة $M(x_0;f(x_0))$ معادلته $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
  - $+\infty$
    نصف مماس عمودي في النقطة $M(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
  - $-\infty$
    نصف مماس عمودي في النقطة $M(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى

اشتقاق الدوال الاعتيادية

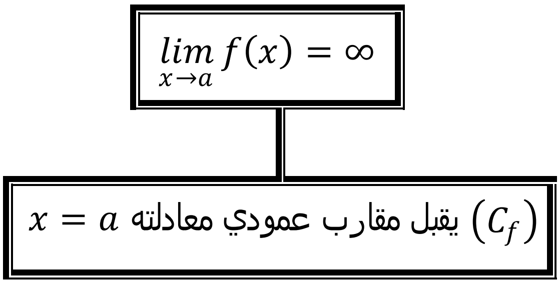
المشتقة $h'(x)$	الدالة $h(x)$
0	c
1	x
a	ax
$2x$	x^2
nx^{n-1}	x^n
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\big(u(x)\big)$
e^x	e^x
ae^{ax}	e^{ax}
ae^{ax+b}	e^{ax+b}
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x)$
$f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$	$f(x) \times g(x)$
$a \times f'(x)$	$a \times f(x)$
$\frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
$\frac{-k \times g'(x)}{[g(x)]^2}$	$\frac{k}{g(x)}$
$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$	$[f(x)]^n$
$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{f(x)}$
$cos(x)$	$sin(x)$
$-sin(x)$	$cos(x)$
$1 + (tan(x))^2$	$tan(x)$

المقاربات و الفروع اللانهائية



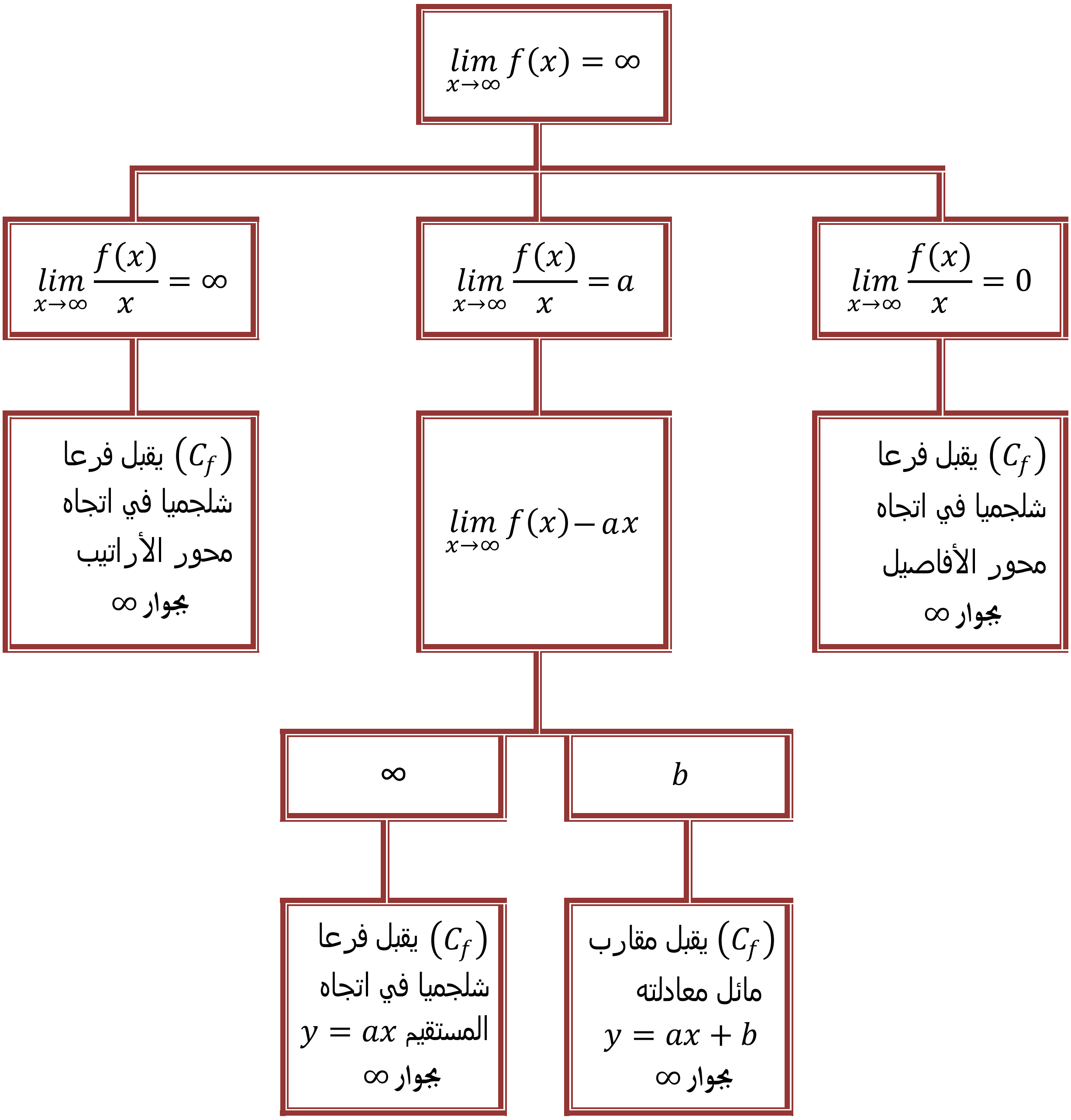
$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

(C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = b$ بجوار ∞



$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

(C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار ∞

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax$

b

(C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$ بجوار ∞

∞

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y = ax$ بجوار ∞

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار ∞

1. الدالة الزوجية

تعريف

تكون f دالة زوجية إذا كانت

- $(\forall x \in D_f) \ ; \quad -x \in D_f$
- $(\forall x \in D_f) \ ; \ f(-x) = f(x)$

ملاحظة

- منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب

2. الدالة الفردية

تعريف

تكون f دالة فردية إذا كانت

- $(\forall x \in D_f) \ ; \quad -x \in D_f$
- $(\forall x \in D_f) \ ; \ f(-x) = -f(x)$

ملاحظة

- منحنى الدالة الفردية يكون متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

3. محور التماثل

المستقيم ذو المعادلة $x = a$ هو محور تماثل المنحنى C_f إذا و فقط إذا كانت

$$\forall x \in D_f \quad \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

4. مركز التماثل

النقطة $I(a;b)$ مركزتماثل المنحنى C_f إذا و فقط إذا كانت

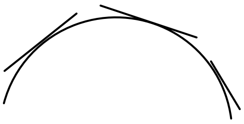
$$\forall x \in D_f \quad \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

5. تقعر منحنى

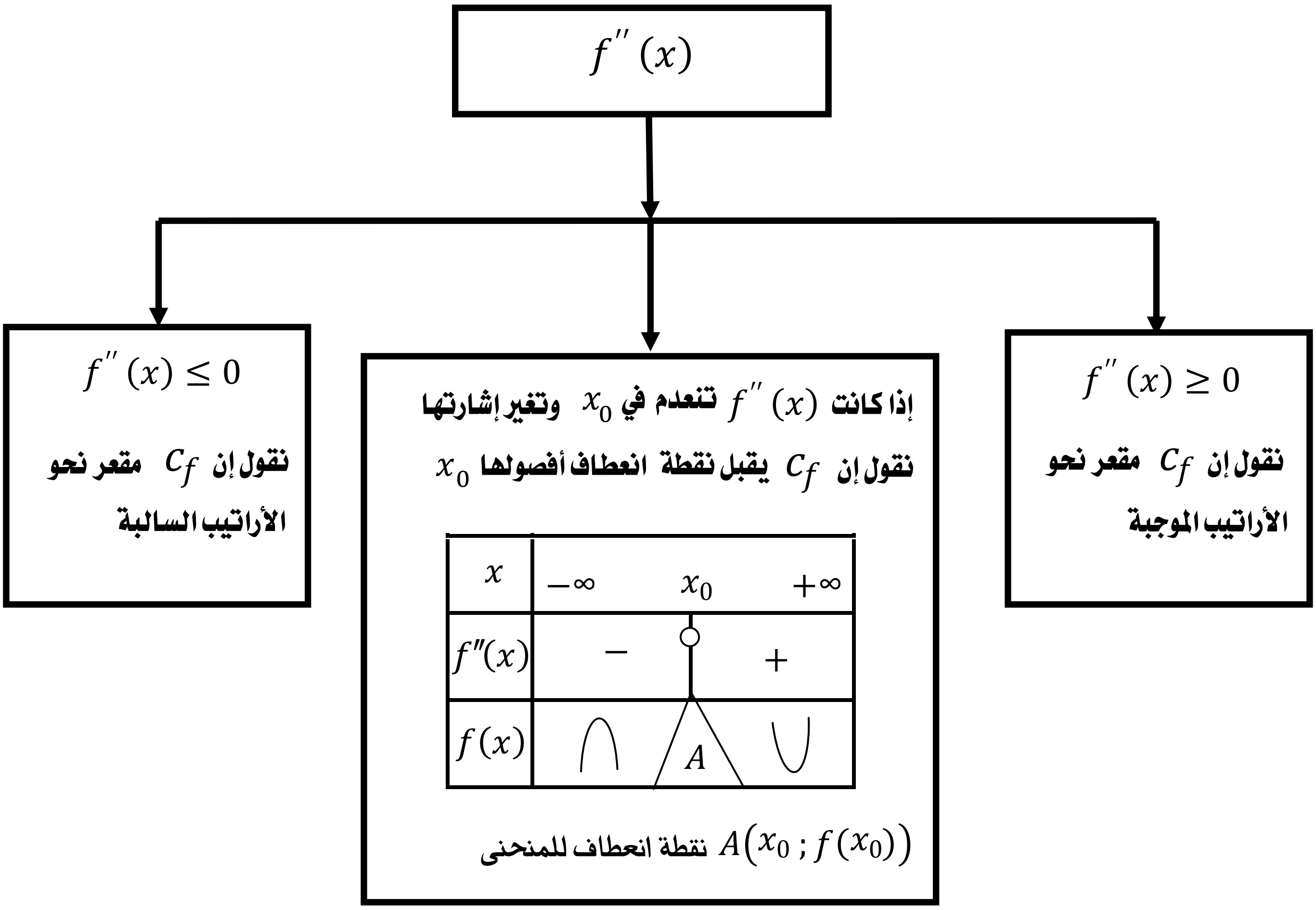
تعريف

- نقول إن المنحنى C_f مقعر نحو الأراتيب الموجبة إذا وفقط إذا كان يوجد فوق جميع مماسته

- نقول إن المنحنى C_f مقعر نحو الأراتيب السالبة إذا وفقط إذا كان يوجد تحت جميع مماسته



دراسة تقعر منحنى



$f''(x)$

$f''(x) \geq 0$

نقول إن C_f مقعر نحو الأراتيب الموجبة

إذا كانت $f''(x)$ تنعدم في x_0 وتغير إشارتها

نقول إن C_f يقبل نقطة انعطاف أفصولها x_0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	∩	A	∪

$A(x_0 ; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى

$f''(x) \leq 0$

نقول إن C_f مقعر نحو الأراتيب السالبة

6. الوضع النسبي

من أجل دراسة الوضع النسبي ل C_f بالنسبة للمستقيم (Δ) نقوم بدراسة إشارة $f(x) - y$

$$f(x) - y$$

$$f(x) - y \geq 0$$

نقول إن C_f **يوجد**
فوق المستقيم (Δ)

إذا كانت $f(x) - y$ **تنعدم في** x_0 **وتغير إشارتها لدراسة الوضع في هذه الحالة ننشئ جدول الوضع النسبي**

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	○	$+$
C_f	C_f تحت (Δ)	A	C_f فوق (Δ)

$A(x_0; f(x_0))$ **نقطة تقاطع المنحنى و المستقيم** (Δ)

$$f(x) - y \leq 0$$

نقول إن C_f **يوجد**
تحت المستقيم (Δ)

7. تقاطع C_f مع محوري المعلم

تقاطع مع محور الأراتيب

التقاطع مع محور الأراتيب هو النقطة $A(0; f(0))$

تقاطع مع محور الأفاصيل

من أجل تحديد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x) = 0$

إذا كانت x_1 و x_2 و ,,, هي الحلول فإن نقط التقاطع هي $A(x_1; 0)$ و $B(x_2; 0)$,,,

8. المقارب المائل

يكون المستقيم $y = ax + b$ (Δ) **مقاربا مائلا** بجوار ∞ C_f إذا وفقط إذا كانت

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - y \right) = 0$$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن المستقيم $y = ax + b$ (Δ) **مقارب مائل لدالة** f