2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 03	منارة الفردوس
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الأولى : 2011/2010	ثانوية موسى بن نصير

Durée : 04 heures

• التمرين رقم 01:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(\mathrm{E}): e^{2x} - 2me^{x} + 1 = 0$ ، حيث $m \in \mathbb{R}$.

⇦ حدد تبعا لقيم البارامتر الحقيقي m مجموعة حلول المعادلة (E) .

• التمرين رقم 02:

1)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

2)- إستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < e^{n} < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

⇦ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \dfrac{1}{e} \times \dfrac{n+1}{n} < u_n < \dfrac{1}{e} \times \dfrac{n+1}{n}\sqrt[n]{n+1}$ ، ثم إستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

• التمرين رقم 03:

لتكن f_n الدالة المعرفة بما يلي : $f_n(x) = \ln(1+nx)$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

1)- حدد D_{f_n} ، ثم أحسب نهايات f_n عند محداته .

2)- بين أن : $(\forall x \in]1;+\infty[), 1 - \dfrac{1}{x} < \ln x < \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.

3)- بين أن f_n تقابل من D_{f_n} نحو $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب $f_n^{-1}(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

4)- بين أن المعادلة : $f_n(x) = x$ تقبل بالضبط حلين 0 و α_n بحيث : $1 - \dfrac{1}{n} < \alpha_n < n - \dfrac{1}{n}$.

5)- بين أن : $\ln n < \alpha_n < 2\ln n$ ، ثم إستنتج أن : $\ln n < \alpha_n < \ln(1 + 2n\ln n)$.

6)- أحسب معللا جوابك كل نهاية من النهايتين : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$ و $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n}$.

- **التمرين رقم 04:**

1)- أ- بين أن : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}\right), \ln t\leq t-1$.

ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right), x\ln x\geq x-1$.

2)- بين أن : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right), x\ln x\leq\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$ (إستعمل **1)**- **ب**-) .

3)- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة : $\left(\mathrm{E}_n\right): x\ln x=\frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا u_n في $\mathbb{R}^{*+}$.

4)- تحقق من أن : $1<u_n<e$ ، ثم أثبت أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), \sqrt{1+\frac{2}{n}}\leq u_n\leq 1+\frac{1}{n}$.

5)- إستنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها ، ثم أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right)^n=e$.

- **التمرين رقم 05:**

⇦ **الجزء الأول:**

ليكن $h\in\mathbb{R}^{*+}$ و لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\varphi(x)=\left(\frac{e^h-(h+1)}{h^2}\right)x^2-\left(e^x-(x+1)\right) .$$

1)- باستعمال مبرهنة رول ، أثبت أنه : $\left(\exists c\in]0;h[\right), \frac{e^h-(h+1)}{h^2}=\frac{e^c-1}{2c}$.

2)- إستنتج النهاية : $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{e^h-(h+1)}{h^2}$ ، ثم أحسب بنفس الطريقة : $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{e^h-(h+1)}{h^2}$.

3)- بدراسة تغيرات الدالة : $\phi: x\mapsto e^x-(x+1)$ على $\mathbb{R}$ ، بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), e^x>x+1$.

⇦ **الجزء الثاني:**

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad \left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1} .$$

1)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f في الصفر (يمكنك إستعمال **الجزء الأول** السؤال **2)**-) .

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = \frac{e^x \phi(x)}{(e^x - 1)^2}$.

4)- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ (إستعمل **<u>الجزء الأول</u>** السؤال **3)**-) .

5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم .

⇦ **<u>الجزء الثالث:</u>**

لتكن F الدالة المعرفة بما يلي :

$$\mathrm{F}(x) = \ln(f(x)), x \neq 0 \text{ و } \mathrm{F}(0) = 0 .$$

1)- تحقق من أن F معرفة على $\mathbb{R}$.

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق F في الصفر .

3)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_{F}) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4)- ضع جدول تغيرات F ، ثم أرسم المنحنى (C_{F}) في معلم متعامد ممنظم .

5)- أدرس إشارة الفرق : $\mathrm{F}(x) - x$ على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$.

⇦ **<u>الجزء الرابع:</u>**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n) \text{ و } u_0 \in \mathbb{R}^{*+} .$$

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 0$.

2)- أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

3)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4)- نفترض فيما يلي أن : $u_0 \in \mathbb{R}^{*-}$ ، بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

- **<u>التمرين رقم 06:</u>**

ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و لتكن a_1 و a_2 و . . . و a_n أعدادا حقيقية موجبة قطعا .

⇦ باعتبار الدالة : $f : x \mapsto e^{x-1} - x$ على المجال $[0;+\infty[$ ، بين أن : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$.

إنتهى الموضوع .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .