المادة : الرياضيات الأستاذ : أسويدي محمد	الدرس 3: المـــرجــــح	المستوى : الأولى باك مسلك العلوم التجريبية ثانوية : رحال المسكيني التأهيلية

القدرات المنتظرة	✍ استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي ✍ إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$ ✍ استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى ✍ استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات ✍ استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية
التوجيهات التربوية	☑ قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى في بعض مواد التخصص ☑ ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح في حل بعض المسائل الهندسية
أهداف الدرس	✍ تعرف مرجح نقطتين متزنتين ✍ تعرف مرجح ثلاث نقط أو أربع نقط متزنة ✍ تعرف وتوظيف الخاصية المميزة للمرجح ✍ إنشاء مرجح نقطتين أو ثلاث نقط أو أربع نقط متزنة ✍ توظيف خاصيتي الصمود والتجميعية ✍ إثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى باستعمال المرجح ✍ توظيف المرجح في تلاقي ثلاث مستقيمات ✍ التمكن من تحديد إحداثيتي المرجح
المكتسبات القبلية	✍ الترتيب في المجموعة $\mathbb{R}$ ✍ المعادلات و والمتراجحات ✍ الحساب المتجهي ✍ المعلم والإحداثيات ✍ الأشكال الهندسية الاعتيادية وخواصها ✍ التماثل المحوري – التماثل المركزي
الامتدادات	✍ جميع دروس الهندسة ✍ .....
فقرات الدرس	I) مرجح نقطتين متزنتين II) مرجح ثلاث نقط متزنة III) مرجح أربع نقط متزنة

I) مرجح نقطتين متزنتين

1) النقطة المتزنة

تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا .الزوج (A,α) يسمى نقطة متزنة ؛
ونقول إن A معينة بالمعامل α أو أن العدد α هو وزن النقطة A

2) مرجح نقطتين متزنتين

نشاط 1

A و B نقطتان مختلفتان

أ / أنشئ النقطة G بحيث $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (أوجد علاقة بين $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AB}$)

ب/ هل يمكنك إنشاء نقطة G بحيث $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ؟ علل جوابك .

ج / ليكن α و β عددين حقيقيين . حدد علاقة بين α و β لكي يتحقق وجود النقطة G بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

مبرهنة وتعريف

لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $\alpha+\beta\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) .
كما تسمى أيضا مرجح النظمة المتزنة $\{(B;\beta)\ ,\ (A;\alpha)\}$

ما يثبت وجود نقطة وحيدة G هو العلاقة $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

ملاحظات

- ✓ إذا $\beta=0$ و $\alpha\neq 0$ فإن $G=A$ و إذا $\beta\neq 0$ و $\alpha=0$ فإن $G=B$
- ✓ إذا كان $\alpha+\beta=0$ فإن (A,α) و (B,β) ليس لهما مرجح
- ✓ لإنشاء مرجح نقطتين؛ غالبا نستعمل العلاقة : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
- ✓ من العلاقة $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ نستنتج أن : $G\in(AB)$:
  - ◆ إذا كان α و β لهما نفس الإشارة فإن $0\leq\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\leq 1$ وبالتالي $G\in[AB]$
  - ◆ إذا كان α و β لهما إشارتان مختلفتان فإذا كان :
    - • $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}>1$ فإن G تنتمي إلى نصف المستقيم $[AB)$.
    - • $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}<0$ فإن G تنتمي إلى نصف المستقيم الذي أصله A ولا يحتوي على B

تمارين تطبيقية

تمرين 1

حدد عددين حقيقيين α و β بحيث تكون النقطة G هي مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β)

-1 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$ -2 $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 3 – G مماثلة A بالنسبة لـ B

تمرين 2

لتكن A و B و C نقطا من المستوى بحيث : $2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ بين أن النقطة B هي مرجح النقطتين A و C مع تحديد وزنيهما

تمرين 3

لتكن A و B نقطتين و G النقطة بحيث : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ بين أن G مرجح للنقطتين $(A,1)$ و (B,β)
حيث β عدد حقيقي يتم تحديده .

تمرين 4

حدد موقع النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) في الحالات التالية :

◆ $(A,2)$ و $(B,1)$　◆ $(A,-1)$ و $(B,2)$　◆ $(A,-3)$ و $(B,-2)$

تمرين 5

أنشئ النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-2)$ و $(B,3)$ و G' مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ ثم أكتب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

3) خاصيات المرجح

أ/ خاصية 1 (خاصية الصمود)

نشاط 2

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$ و G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) حيث : $\alpha+\beta\neq 0$

بين أن G هو مرجح النقطتين المتزنتين $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$

خاصية

مرجح نقطتين متزنتين لايتغير بضرب معامليهما بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم .
إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) فإن لكل k من $\mathbb{R}^*$ ؛ G هي كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

مثال

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-0,003)$ و $(B,0,001)$ هي أيضا مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-3)$ و $(B,1)$ بضرب المعاملات في 1000.

ملاحظة

إذا كان $\alpha=\beta$ فإن $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ أي أن G منتصف القطعة [AB] (نقول إن G مركز ثقل النقطتين A و B)

ب/ خاصية 2 (الخاصية المميزة)

نشاط 3

لتكن M نقطة من المستوى .

بين أن : G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

خاصية

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P) و α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha+\beta\neq 0$.
تكون النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) إذا وفقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى (P)
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$$

حالات خاصة :

✓ بتعويض النقطة M بالنقطة A نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

✓ بتعويض النقطة M بالنقطة B نحصل على : $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

تمارين تطبيقية

تمرين 06

ABC مثلث و B' مرجح النقطتين المتزنتين : $(A,-2)$ و $(C,1)$ و A' مرجح $(A,2)$ و $(B,3)$ و C' مرجح $(C,-1)$ و $(B,3)$.

1/ أنشئ الشكل .

2/ بين أن لكل نقطة M من المستوى $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

3/ استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين 07

1/ أنشئ I مرجح $(A,2)$ و $(C,1)$ و J مرجح $(A,1)$ و$(B,2)$ و K مرجح $(B,-4)$ و $(C,1)$.

2/ بين أن B مرجح $(K,3)$ و $(C,1)$

/3 بين أن J منتصف القطعة [KI]

تمرين 08

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P)

/1 حدد مجموعة النقط M بحيث : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=15$

/2 حدد مجموعة النقط M بحيث : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|$

ج- إحداثيتا مرجح نقطتين

نشاط4

في المستوى المنسوب للمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقطتين $A\left(x_A,y_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B\right)$.

لتكن G مرجح النقطتين المتزنتين $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$

-1 أكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

-2 ليكن $\left(x_G,y_G\right)$ زوج إحداثيتي G ؛ أكتب x_G بدلالة كل من x_A و x_B . و y_G بدلالة كل من y_A و y_B.

خاصية 3

في مستوى منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ لتكن النقط $A\left(x_A,y_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B\right)$ و $G\left(x_G,y_G\right)$.

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$ فإن: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ و $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

II) مرجح ثلاث نقط متزنة .

1) خاصية وتعريف .

لتكن $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$ و $\left(C,\delta\right)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى (P) بحيث : $\alpha+\beta+\delta\neq0$.

توجد نقطة واحدة G من المستوى (P) بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$ و $\left(C,\delta\right)$

2)ملاحظات

✓ إذا كان G مرجح النقط المتزنة $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$ و $\left(C,\delta\right)$ فإنها تحقق : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AC}$

✓ إذا كان $\alpha+\beta+\delta=0$ فإن النقط المتزنة $\left(A,\alpha\right)$ و $\left(B,\beta\right)$ و $\left(C,\delta\right)$ ليس لها مرجح .

3) تعريف (مركز ثقل مثلث)

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C في المستوى هو مرجح هذه النقط معينة بنفس المعامل غير المعامل .

بمعنى : G مركز ثقل المثلث ABC يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

4) خاصية1 (الخاصية المميزة لمرجح ثلاث نقط)

نشاط 5

لتكن $\left(A;\alpha\right)$ وَ $\left(B;\beta\right)$ و $\left(C;\delta\right)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta+\delta\neq0$. و M نقطة من المستوى

بين صحة التكافؤ التالي :

$$\left[\, G \text{ مرجح النقط المتزنة } \left(A;\alpha\right) \text{ وَ } \left(B;\beta\right) \text{ و } \left(C;\delta\right) \right] \Leftrightarrow \left[\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=\left(\alpha+\beta+\delta\right)\overrightarrow{MG}\right]$$

خاصية

لتكن $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta+\delta\neq 0$.ولتكن G نقطة من المستوى.
G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ إذا وفقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$$

تمرين تطبيقي

تمرين 09

ليكن ABC مثلثا من المستوى بحيث : $AB=6$ و $BC=5$ و $AC=4$ و G مركز ثقل المثلث ABC .

- حدد و أنشئ مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$.
- i / بين أنه لكل M من المستوى (P) : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{IA}$ حيث I منتصف القطعة $[BC]$.
  ii / حدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

5) خاصية 2 (خاصية التجميعية)

نشاط6

لتكن $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta+\delta\neq 0$. ولتكن G_1 مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.

1/ بين أن : G مرجح $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ يكافئ لكل M من المستوى : $(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}+\delta\overrightarrow{MC}$

2/ استنتج مرجح النظمة المتزنة $\{(G_1;x);(C;\delta)\}$ محدد العدد x معامل النقطة G_1.

خاصية

لتكن $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta\neq 0$ $\alpha+\beta+\delta\neq 0$.
إذا كانت G_1 مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$. و G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ وَ $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$
فإن G مرجح $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\delta)$.

تمرين 10

ليكن ABC مثلثا و النقط A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات القطع [BC] و [AC] و [AB]. وليكن G مركز ثقل ABC .

1/ بين أن : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

2/ بين أن متوسطات المثلث ABC تتقاطع في نقطة وحيدة يجب تحديدها .

تمرين 11

ليكن ABC مثلثا و G مرجح النقط المتزنة $(A;3)$ و $(B;7)$ و $(C;-4)$ ولتكن K النقطة بحيث : $\overrightarrow{BK}=\frac{-4}{3}\overrightarrow{BC}$

بين أن G منتصف $[AK]$.

6) إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

خاصية

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقط $A(x_A;y_B)$ و $B(x_B,y_B)$ و $G(x_G,y_G)$.
إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\delta)$ فإن :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta} \quad \text{و} \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta}$$

تمارين تطبيقية

تمرين 12

ليكن ABC مثلث ؛ ولتكن I مرجح النقطتين المتزنتين $(B;4)$ و $(C;-3)$

حدد إحداثيتي كل من النقطتين I و G مركز ثقل المثلث ABC .في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

التمرين 13

في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقطتين $B(2;5)$ و $C(5;2)$ ولتكن H مرجح النقطتين $(B;2)$ و $(C;1)$

أ / احسب إحداثيتي النقطة H .

ب / لتكن G النقطة بحيث تكون H هي مرجح النقطتين المتزنتين $(C;-1)$ و $(G;2)$ و $(O;1)$ احسب إحداثيتي النقطة G .

III) مرجح أربع نقط متزنة

1) مبرهنة وتعريف

تكون النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\delta)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0} \quad \text{و} \quad \alpha+\beta+\delta+\gamma\neq 0$$

تمرين 14

ليكن ABCD متوازي أضلاع .مركزه O . بين أن O هي مركز ثقل متوازي الأضلاع ABCD .

2) الخاصية المميزة لمرجح لأربع نقط

تكون النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\delta)$ إذا وفقط إذا كان لكل نقطة M من المستوى :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$$

3) الخاصية التجميعية

- ✓ **لايتغير مرجح أربع نقط إذا عوضنا نقطتين منها بمرجحيهما معينا بمجموع وزنيهما إذا كان غير منعدم .**
- ✓ **لايتغير مرجح أربع نقط إذا عوضنا ثلاث نقط منها بمرجحيها معينا بمجموع أوزانها شريطة أن يكون هذا المجموع غير منعدم**

مثال :

ليكن G مركز ثقل النقط A و B و C و D أي G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;1)\}$

و هي أيضا مرجح النقطتين $(J;2)$ و $(I;2)$ حيث I منتصف [AB] و J منتصف [DC]

و هي أيضا مرجح النقطتين المتزنتين $(G_1;3)$ و $(D;1)$ حيث G_1 مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$