Classe : Terminal SM Prof : M.Idir	Contrôle continu 2: Date : 25/11/2019	Groupe Scolaire Allal Aouad Bettana - Salé

Barème

Problème : (14 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{Arc\tan\sqrt[3]{-x}}{\sqrt[3]{-x}} & ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} & ; x \geq 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1 : (pts)

0,75 — 1- En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$(\forall t \in \mathbb{R}^+); Arc\tan t - \dfrac{t}{1+t^2} \geq 0$.

1 — 2- a)Soit $t \in \mathbb{R}^{*+}$**,** En utilisant Rolle pour la fonction
$\varphi : x \mapsto \left(t - Arc\tan t\right)x^3 - t^3\left(x - Arc\tan x\right)$ définie sur un intervalle , montrer que :

$\exists c \in \left]0,t\right[: \quad \dfrac{t - Arc\tan t}{t^3} = \dfrac{1}{3(1+c^2)}$ **.**

0,5 — b) Calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t - Arc\tan t}{t^3}$**.**

Partie 2 : (pts)

0,5 — 1- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

1,5 — 2- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter les résultats obtenus.

0,75 — 3- a- Etudier la dérivabilité de f à droite de 0, et donner l'interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,75 — b- Etudier la dérivabilité de f à gauche de 0, et donner l'interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,75 — 4- a –Montrer que f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

0,75 — b – Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{*-} : f'(x) = \dfrac{1}{3(-x)^{\frac{4}{3}}}\left[\arctan(\sqrt[3]{-x}) - \dfrac{\sqrt[3]{-x}}{1+\left(\sqrt[3]{-x}\right)^2}\right]$

1 — c – Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\left]-\infty,0\right[$ puis donner le tableau de variation de f **.**

0,75 — 5- Etudier la concavité de sur $\left]0,+\infty\right[$ et déterminer son point d'inflexion.

1 — 6- Construire (C_f) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 3 : (pts)

Soit h la restriction de f sur $I = \left[0;+\infty\right[$ **.**

0,75 — 1- Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α dans I et que $2 < \alpha < 3$.

0,5 — 2- Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer ?

0,75 — 3- Déterminer $(h^{-1})'(\alpha)$

0,75 — 4- Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ **.**

Partie 4 : (pts)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = h(u_n) \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0,5 — 1- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha < u_n \leq 3$.

0,75 — 2- Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice : (6 pts)

A- Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 > 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0,75 1- $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 2$.

0,75 2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

0,75 3- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} > u_n (u_0 - 1)$

B- On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = (u_n - 1)^{\frac{1}{2^n}}$ et $b_n = (u_n)^{\frac{1}{2^n}}$

0,75 1- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $(u_n - 1)^2 < u_{n+1} - 1 < u_{n+1} < u_n^2$.

0,75 2- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.

0,75 3- a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left(\mathrm{b}_n\right)^{2^n} - \left(a_n\right)^{2^n} = 1$.

1 b) En utilisant le théorème des accroissements finis pour la fonction : $x \to x^{2^n}$ dans un intervalle à déterminer, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$.

0,5 4- En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice Facultatif : (2 pts)

1- Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $+\infty$ *et* $-\infty$.

2- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que :
$f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$

Montrer que : $\exists c \in]a,b[: \ f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$