سلم التنقيط	2علوم رياضية ا 23-01-2012	فرض محروس4	ثانوية ابن خلدون فاس

تمرين أول

نعتبر العددين العقديين ω و a المعرفين ب $a=-1+i\sqrt{3}$ و

$$\omega=\sqrt[5]{2}\,e^{2i\frac{\pi}{15}}$$

(1) 1. بين أن $a=2e^{2i\frac{\pi}{3}}$ وان ω جذر من الرتبة الخامسة ل a

(0.5) 2. ا. حدد الجذور من الرتبة الخامسة للوحدة

(1) ب. استنتج تعميلا من حدوديتين درجتهما2 ومعاملاتها حقيقية للحدودية $X^4+X^3+X^2+X+1$

(1.5) 3. استنتج الجذور من الرتبة الخامسة المتبقية للعدد a بدلالة ω والجذور السابقة واذكر دون تعليل خاصية هندسية وأخرى جبرية لهذه الجذور

(1.5) 4. بين أن

$$\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{10\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{16\pi}{15}\right)+\cos\left(\frac{22\pi}{15}\right)=0$$

مسالة

جزء1

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة g_n المعرفة على بما يلي:

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad g_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln(x)$$

(0.75) 1. ادرس تغيرات الدالة g_n

(1.5) 2. ا. بين انه يوجد عدد وحيد u_n من المجال $\left]0,+\infty\right[$ حيث $g_n(u_n)=0$ وان $1\le u_n\prec e^2$

(0.25) ب. تأكد أن $u_1=1$

(1.5) ج. بين أن $\ln(u_n)=2-\frac{2}{n}u_n$ ثم اكتب $g_{n+1}(u_n)$ بدلالة u_n و n واستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة

(1) د. احسب $\lim\limits_{n} u_n$

جزء2

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad f(x)=\frac{2x-\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

وليكن (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و (C_0) منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ في نفس المعلم

(1) 1. احسب النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$ وأول النتيجة المحصلة مبيانيا

(1) 2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم ادرس الفرع اللانهائي ل (C)

(1) 3. بين أن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ ثم ضع جدول تغيرات f

(1.5) 4. ادرس الوضع النسبي ل (C) و (C_0) ثم ارسمهما

جزء3

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ب

$$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln(x)$$

(1) 1. بين أن F دالة أصلية ل f على المجال $\left]0,+\infty\right[$

2. لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

(2) أ. ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ وليكن k من $\mathbb{N}$ حيث $1\le k\le n$. بين أن

$$\forall x\in\left[1+\frac{k}{n},1+\frac{k+1}{n}\right]\quad f\left(1+\frac{k}{n}\right)\le f(x)\le f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

واستنتج أن

$$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\le F\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-F\left(1+\frac{k}{n}\right)\le\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

يمكن استعمال احدى متفاوتتي التزايدات المنتهية

(1) ب. بين ان $u_n-\frac{f(2)}{n}\le F(2)-F(1)\le u_n-\frac{f(1)}{n}$

(1) ت. استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f\left(x\right)=\ln(x)-x+1$

1. ادرس تغيرات الدالة f واستنتج أن
$\forall x \succ 0 \quad \ln\left(x\right)\leq x-1$
2. لتكن a_1 و a_2 و..... و a_n أعداد حقيقية موجبة قطعا حيث عدد صحيح طبيعي غير منعدم . نعتبر المتتاليتين المعرفتين بما يلي
$S_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ و
$\Pi_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$