

التمرين الأول (3نقط)

لدينا صندوقان U و V. الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و4 كرات زرقاء؛
الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و4 كرات زرقاء؛
نعتبر التجربة الآتية:

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U: إذا كانت حمراء ، نضعها في الصندوق V ثم
نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V؛ وإذا كانت زرقاء، نضعها جانبا؛ ثم نسحب عشوائيا كرة من
الصندوق V.

ولتكن الأحداث التالية:

R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء "؛

B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء "؛

R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "؛

B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء "؛

(1) احسب احتمال الحدثين R_1 و B_1 .

(2) احسب احتمال " B_2 علما أن R_1 محقق " واحتمال " B_2 علما أن B_1 محقق ".

(3) بين أن: $p(B_2) = \frac{13}{21}$.

(4) استنتج $p(R_2)$.

1

1

0.5

0.5

التمرين الثاني (4نقط ونصف)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $0 \leq \theta \leq 2\pi$. نضع: $p = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$.

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة (E) التالية: $z^2 - 2pz + 16 = 0$.

(1) أ- تحقق أن: $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$

ب- حل في \mathbb{C} المعادلة (E): نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث: $|z_1| < |z_2|$.

(2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاها على التوالي هما z_1 و z_2 .

أ) بين أنه عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi[$ ، فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة

(C) ينبغي تحديد معادلة لها.

0.5

0.5

0.5

(ب) لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

ولتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi[$.

بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتين لحاقهما 4 و -4.

(3) أ- بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C} - \{4\}$ ، لدينا: $(ab = 16) \Leftrightarrow \left(\frac{b+4}{b-4} = -\frac{a+4}{a-4}\right)$

ب- استنتج أن: $\frac{z_2+4}{z_2-4} = -\frac{z_1+4}{z_1-4}$

ج- بين أن: $\overline{(M_1F; M_1F')} \equiv \pi + \overline{(M_2F; M_2F')} [2\pi]$.

(4) أ) بين أن المعادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي:
 $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$.

ب) بين أن: المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .

التمرين الثالث (3 نقط)

لكل $(a; b)$ من \mathbb{Z}^2 ، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$.

في (\mathbb{R}) نعتبر المجموعة المصفوفات الآتية: $E = \{M_{(a;b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$.

(1) نضع: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. تحقق أن A تنتمي إلى E .

(2) أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$ وأن القانون \times تبادلي في E .

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي \times .

ج- بين أن زمرة تبادلية $(E; \times)$.

(3) نضع: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، ولكل n من \mathbb{N} : $A^{n+1} = A^n \times A$.

نعتبر المجموعة: $G = \{A^n / n \in \mathbb{N}\}$.

أ) تحقق أن: $G \subset E$.

ب) لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية \times في E .

بين أن: $H = \{B^n / n \in \mathbb{N}\}$ حيث: $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

ج) بين أن: $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E; \times)$.

التمرين الرابع (9 نقط ونصف)

I- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة g_n في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ- أدرس تغيرات الدالة g_n . 0.5

ب- بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n . 0.5

(2) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ 0.5

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) . 0.5

(3) أ- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) الممثلين للدالتين g_1 و g_2 . 0.5

ب- ارسم، في نفس المعلم، المنحنيين (C_1) و (C_2) . 0.5

(نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ ونعطي: $\ln 2 \approx 0,7$)

(4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء، احسب بدلالة x التكامل: $I(x) = \int te^{-2t} dt$ 1

ب- لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0; \ln 2]$. 0.5

احسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفصيل.

(5) بضع: $v_n = g_n(u_n)$.

بين أن المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربتان وحدد نهايتهما. 1

II - نعتبر الدالة العددية F_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $F_n(x) = x + e^{nx}$

وليكن (Γ_n) منحنى الدالة F_n في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) .

(1) ادرس تغيرات الدالة F_n . 0.5

(2) استنتج أن المعادلة $F_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n . 0.5

(3) أ- بين أن: $\alpha_1 \in \left] -\ln 2, -\frac{1}{2} \right[$. 0.5

ب- بين أن $x - \alpha_1$ و $e^x + \alpha_1$ لهما نفس الإشارة. 0.5

(4) أ- لتكن φ الدالة المعرفة على $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$ بما يلي: $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} x$. 0.5

بين أن الدالة φ تناقصية على $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$.

ب- استنتج أن: $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$. 0.5

(5) نضع: $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ ولكل عدد صحيح طبيعي n : $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$.

أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث: $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a|\beta_n - \alpha_1|$ لكل n من \mathbb{N} .

ب- بين أن المتتالية (β_n) متقاربة وحدد نهايتها.

0.5

0.5