2 BAC M - 2h - 26/10/13	فرض محروس رقم 1 . - الدورة الأولى -	الثانوية التأهيلية وادي الذهب تيفلت نيابة الخميسات

التمرين الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)}{x}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. 1

2) أ - أدرس اتصال f على المجال $]0;+\infty[$. 0,5

ب - هل يمكن تمديد الدالة f بالاتصال في النقطة 0 ؟ (علل جوابك). 1

التمرين الثاني: لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي: $g(x)=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}$

1) بين أن: $\forall x>0:\left(g\circ g(x)=x\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ 1

2) حل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة: $(E):\ g\circ g(x)-x=0$ 1

مسألة: لتكن f_n $(n\in\mathbb{N};\ n\geq 2)$ الدالة العددية المعرفة على $[0;\frac{\pi}{2}[$ بما يلي:

$$f_n(x)=\sqrt[n]{\tan x}$$

1) أ - أدرس اتصال الدالة f_n على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$. 0,5

ب - أدرس قابلية اشتقاق f_n على المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$. 0,5

ج - أدرس قابلية اشتقاق f_n على اليمين في الصفر. 0,75

د - بين أن f_n تقابل من $[0;\frac{\pi}{2}[$ نحو مجال J يجب تحديده. 1,25

2) لتكن g_n الدالة العكسية للدالة f_n . (في أسئلة 2) و 3) غير مطلوب تحديد $g_n(x)$ بدلالة x).

أ - بين أن المعادلة $g_n(x)=\frac{\pi}{5}$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+$. 1

ب - استنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$. (قارن: $f_{n+1}(\frac{\pi}{5})$ و $f_n(\frac{\pi}{5})$). 1

ج - بين أن $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{n}}<\alpha_n<1$. (لاحظ أن: $\ldots\leq\frac{\pi}{5}\leq\ldots$). 0,5

د - بين أن المعادلة: $f_n(x)+g_n(x)=\frac{\pi}{5}$ تقبل حلا وحيدا β_n في المجال $]0;\frac{\pi}{5}[$ 1

هـ - تحقق أن: $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}:\ f_n(\beta_n)=g_n(\alpha_n)-g_n(\beta_n)$ 1,25

ثم استنتج أن: $\alpha_n>\beta_n$ لكل n من $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

3) أ - بين أن الدالة g_n قابلة للاشتقاق في 1 ثم أحسب $g_n'(1)$. 1

ب - بين أن: $\forall x\in]0;+\infty[:\ g_n'(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$ 1

ج - نضع لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $h_n(x)=g_n(\frac{1}{x})$.

أ. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}h_n(x)$ و $h_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$. 1

2è BScM - 2 h - 26 / 10 / 13	تتمة الفرض المحروس رقم 1 - د I -	الثانوية التأهيلية وادي الذهب تيفلت

د - بين أن : $\forall x \in]0;+\infty[: \quad g_n(x) + h_n(x) = \frac{\pi}{2}$ 1

4) أ - حدد لكل x من $\mathbb{R}_+$: $g_n(x)$ بدلالة x . 0.25

ب - استنتج مرة أخرى نتيجة 3) د - 0.25

ج - استنتج مرة أخرى نتيجة 3) ب - 0.5

5) نعتبر الدالة K_n المعرفة ب : $K_n(x) = g_n\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$

أ - حدد مجموعة تعريف الدالة K_n D_{K_n} ثم أحسب : $\lim\limits_{x \to -\infty} K_n(x)$ 1

ب - بين أن K_n تقابل من $]-\infty;-3[$ نحو مجال J_1 نحدده . 1

ج - أحسب $K'_1(x)$ لكل x من $]-\infty;-3[$. 1

تمرين إضافي : لتكن f دالة معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ ، بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$. 2

ع ع

يؤخذ بعين الاعتبار دقة وسلامة الانشاء وحسن تدبير الحل
+1 .