ثانوية ابن بطوطة التأهيلية | سلسلة رقم ٧ | **السنة الدراسية :** ٢٠١٤/٢٠١٥

المستوى: ٢ ع ف ٢ | **الأستاذ:** محمد لغزال

الأعداد العقدية-الجزء I

التمرين ١

I-أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية الآتية :

1) $z_1=(1-i)^4$ 2) $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$

3) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ 4) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$

5) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ 6) $z_3=\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$

II- n عدد طبيعي غير منعدم

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري

التمرين ٢

1) عين $\mathrm{Re}(z)$ و $\mathrm{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات التالية : $z=3+2i$ ؛ $z=-1+3i$ ؛ $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $z=i-3\sqrt{2}$ ؛ $z=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ؛ $z=-i\sqrt{3}$.

2) z عدد عقدي، نضع : $f(z)=z^2-z$ حيث $z=x+yi$ مع x و y عددين حقيقيين .

برهن أنّ : $\mathrm{Re}[f(z)]=x^2-y^2-x$ و $\mathrm{Im}[f(z)]=y(2x-1)$.

3) نضع $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ ، $z_3=-3+3i$.

أ) أحسب $\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)$, $\mathrm{Re}\left(2z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3\right)$ و $\mathrm{Re}[z_2(z_1+z_3)]$.

ب) أحسب $\mathrm{Im}(z_1-3iz_3)$ ، $\mathrm{Im}[z_2-z_1z_3]$ و $\mathrm{Im}(z_1z_2z_3)$.

التمرين ٣

A ، B ، C و D أربع نقط من المستوى لواحقها على التوالي $-2+i$ ، $-1+4i$ ، $3+2i$ و $2-i$.

برهن أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

التمرين ٤

1) أكتب مرافق كل من الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري

$z_1=(1-i)(2+i)$ $z_2=(1+2i)^3$

$z_3=\frac{3-i}{1+i}$ $z_4=\left(\frac{1+3i}{2-i}\right)^4$

2) أكتب بدلالة $\bar{z}$ ، مرافق الأعداد العقدية Z التالية :

أ- $Z=2+3iz$ ب- $Z=(2+iz)(1+3z)$

جـ- $Z=\frac{2+iz}{z+2}$ د- $Z=z^3-iz^2+3z-3i$

التمرين ٥

1) نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_1=2$ ، $z_2=-i$ و $z_3=1+2i$.

أ) أحسب $|z_2-z_1|$, $|z_3-z_1|$ و $|z_3-z_2|$.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) نعتبر الأعداد العقدية $z_1=5-2i$ ، $z_2=2+4i$ و $z_3=-3+3i$.

أحسب : $|z_1|$ ، $|z_2|$ ، $|z_1+z_2+z_3|$ و $|z_1z_2z_3|$.

التمرين ٦

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

1- $(1-i)z=3+i$

2- $3z-2+i=(1+i)z-1-2i$

3- $(3-4i)z^2=iz$ 4- $\frac{z+1}{z-1}=2i$

5- $2\bar{z}=-1+i$ 6- $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$

7- $\frac{z-3}{2+5i}-3+i=0$ 8- $(1-iz)-2\bar{z}=1-5i$

9- $\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)^2-6\left(\frac{z-2}{z-4i}\right)+13=0$

التمرين ٧

1) z عدد عقدي غير منعدم معياره r و θ عمدة له .
حدد معيار وعمدة كل من الأعداد العقدية التالية :
$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $\frac{1}{z}$ ؛ z^3 ؛ $\frac{1}{z^n}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

2) في كل حالة من الحالات أدناه ، عين معيار وعمدة للعدد z .

أ - $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ب - $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

جـ - $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

د - $z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

التمرين ٨

1) z عدد عقدي غير منعدم .
باستعمال البرهان بالترجع ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n ، $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

2) في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللحق z التي تحقق المتساوية المقترحة

أ - $Arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$ ب - $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$

جـ - $Arg(z) = Arg(\bar{z})$.

التمرين ٩

1- اكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ $\quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1 = 3$ $\quad z_2 = -\sqrt{5}$ $\quad z_3 = i$ $\quad z_4 = \frac{1}{2}i$ $\quad z_5 = -7i$

2- نعتبر العدد العقدي $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
حدد الشكل ألمثلثي للعدد z^2 ثم استنتج $|z^{60}|$ و $Arg|z^{60}|$

التمرين ١٠

A ؛ B و C نقط من المستوى لواحقها على الترتيب $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$ و $z_3 = -1-i$.

1) أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$.

2) أحسب $Arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$.

3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين ١١

نعتبر الدالة $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ لكل $z \in C - \{i\}$.

1- أعط تعبير الجزء الحقيقي و التخيلي للدالة f بدلالة x و y .

2- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\operatorname{Im} f(z) = 0$

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\operatorname{Re} f(z) = 0$

التمرين ١٢

نعتبر العدد العقدي $v = \frac{5-3iz}{2+iz}$ لكل $z \in C - \{2i\}$ و لتكن $M(z)$ صورة z في المستوى العقدي.

1- بين أن $\forall z \in C - \{2i\} : v \in IR \Leftrightarrow z \in iIR$

2- استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $v \in IR$

التمرين ١٣

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O ; \vec{u} , \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحقاها على التوالي هي : $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+i$ و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z' = (1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ - بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2 - 3z + 3 = 0$.

ب - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) أ - عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب - استنتج أن $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.