الأولمبياد الوطنية في الرياضيات 2025

الفرض الأول باللغتين العربية والأنجليزية

المستوى الدراسي : جذع مشترك **الشعبة : العلمية**

تاريخ التمرير : الجمعة 2 دجنبر 2022 **مدة الإنجاز : ثلاث ساعات**

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد ؛
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

المسألة 1 : ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعاً حيث $x+y=1$.

بيّن أن :

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}.$$

Problem 1 : Let x and y be two strictly positive real numbers such that $x+y=1$.

Show that :

$$\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}\geq\frac{1}{3}.$$

المسألة 2 : يتوفر خياط على قطعة قماش كبيرة. يقوم بتقطيعها إلى 4 قطع. يختار بعد ذلك واحدة من القطع الأربع التي يقطعها مرة أخرى إلى 4 قطع. يكرر الخياط هذه العملية عدة مرات.

هل يمكن الحصول بعد هذه العمليات على 2022 قطعة صغيرة من القماش؟

Problem 2 : A tailor has a large piece of fabric. He cuts it into 4 pieces. He then chooses one of the 4 pieces which again cuts it into 4 pieces. The tailor repeats this operation a number of times.

Is it possible to have, after these operations, 2022 small pieces of fabric ?

المسألة 3 : ليكن $MNPQ$ متوازي أضلاع. نعتبر نقطة E داخل $MNPQ$ حيث $PE=PN$. النقطتان I و J هما على التوالي منتصفا القطعتين $[ME]$ و $[PQ]$.

بيّن أن : $(NE)\perp(IJ)$.

Problem 3 : Let $MNPQ$ be a parallelogram. Consider a point E inside $MNPQ$ such that $PE=PN$. The points I and J are respectively the midpoints of the segments $[ME]$ and $[PQ]$.

Show that : $(NE)\perp(IJ)$.

المسألة 4 : حدّد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة a و b حيث :

$$1+2^a+2^{a+1}=b^2.$$

Problem 4 : Determine all nonzero natural numbers a and b such that :

$$1+2^a+2^{a+1}=b^2.$$