منـارة الـفـردوس	تجريبـي دورة فبراير 2011	2 باك علوم رياضية
نيابة الخميسات	لمادة الرياضيات	المعامل : 09
		مدة الإنجاز : 04 ساعات

■ التمرين رقم 01: $(2{,}5pts)$

لكل $z \in \mathbb{C}$ ، نضع : $\mathrm{F}(z) = z^2 - \sqrt{2}.z + i\sqrt{3}$.

1)- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $a = 2 - 8i\sqrt{3}$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E}) : \mathrm{F}(z) = -i\sqrt{3}$ ، ثم أكتب حليها على الشكل المثلثي .

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر المجموعتين :

$$(\mathrm{H}) = \left\{M(z) \in (\mathrm{P}) ; \mathrm{F}(z) \in \mathbb{R}\right\} \text{ و } (C) = \left\{M(z) \in (\mathrm{P}) ; \left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} .$$

أ- حدد معادلة ديكارتية للمنحنى (H) ، ثم إستنتج طبيعته و أرسمه في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ب- بين أنه عندما تتغير النقطة M ذات اللحق z على المجموعة (C) ، فإن النقطة M' ذات اللحق $z' = \mathrm{F}(z)$ تتغير على دائرة (C') ينبغي تحديد شعاعها و لحق مركزها .

■ التمرين رقم 02: $(2{,}5pts)$

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن $m \in \mathbb{C}^*$ بحيث : $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ و $r = |m|$ و لتكن M النقطة ذات اللحق m و A هي النقطة ذات اللحق $a = 1$.

1)- أكتب العدد العقدي $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ على شكله الأسي .

2)- حدد قيمة r من $\mathbb{R}^{*+}$ التي من أجلها يكون : $AM = 1$.

3)- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E}_m) : mz^2 - (1+i)z + \frac{\sqrt{3}+i}{2m} = 0$ و لتكن M_1 و M_2 النقطتين اللتين لحقاهما z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m) .

أ- بدون حل المعادلة (E_m) ، بين أن : $\arg(z_1 + z_2) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

ب- بين أن : $m\frac{\sqrt{3}+i}{2m} = i$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) .

ج- بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين و قائم الزاوية في O .

■ التمرين رقم 03: $(03pts)$

ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 3$.

و لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1)- ضع جدول تغيرات f (مطلوب حساب نهايتي f عند محدي $\mathbb{R}^{*+}$) .

2)- بين أن المعادلة : $f(x)=\dfrac{1}{n}$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α_n و β_n بحيث : $1<\alpha_n<e<\beta_n$.

3)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ تناقصية قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n$.

4)- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\geq 3}$ تزايدية قطعا ، ثم أثبت أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty$.

■ التمرين رقم 04: $(03pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$.

1)- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$.

2)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{+});\ln(x+1)\leq f(x)\leq\ln(x+2)$.

3)- لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي : $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x$.

⇦ بين أن φ تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ ، ثم إستنتج أن المعادلة : $(E):f(x)=\dfrac{1}{2}x$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $1<\alpha<4$.

4)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(2u_n)$.

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in[1;2]$.

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\left|u_{n+1}-\dfrac{1}{2}\alpha\right|\leq\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left|u_n-\dfrac{1}{2}\alpha\right|$.

ج- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ **التمرين رقم 05:** $(09pts)$

⇦ **الجزء الأول:** $(02pts)$

لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\varphi(x)=e^x(2-x)-2 .$$

1)- ضع جدول تغيرات φ (مطلوب حساب نهايتي φ عند $+\infty$ و $-\infty$) .

2)- بين أن المعادلة : $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما α بحيث : $1<\alpha<2$.

3)- ضع جدولا تحدد فيه إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

⇦ **الجزء الثاني:** $(03pts)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(0)=0 \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^*), f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} .$$

1)- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.

2)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*), f'(x)=\dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$.

4)- بين أن : $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نعطي : $\alpha=1,6$) .

6)- تحقق من أن f تقبل دالة أصلية G على المجال $[0;+\infty[$.

⇦ **الجزء الثالث:** $(04pts)$

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$\mathrm{F}(x)=G(2\ln x)-G(\ln x) .$$

1)- ليكن $x\in]1;+\infty[$ ، بين أنه : $(\exists c\in]\ln x;2\ln x[);\mathrm{F}(x)=f(c)\times\ln x$.

2)- أ- إستنتج أنه : $(\forall x\in]1;\sqrt{e}[);\dfrac{(\ln x)^3}{(x-1)^2}<\dfrac{\mathrm{F}(x)}{x-1}<\dfrac{4(\ln x)^3}{(x+1)(x-1)^2}$.

ب- أدرس قابلية إشتقاق F على اليمين في $x_0=1$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

3)- أ- بين أن : $\left(\forall x \in \left]e^2;+\infty\right[\right); \frac{4(\ln x)^3}{x^2-1} < \mathrm{F}(x) < \frac{(\ln x)^3}{x-1}$.

ب- إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

4)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\left]1;+\infty\right[$ و أن :

$$\left(\forall x \in \left]1;+\infty\right[\right); \mathrm{F}'(x) = \frac{7-x}{x\left(x^2-1\right)}(\ln x)^2 .$$

5)- ضع جدول تغيرات F ثم أرسم (C_{F}) في معلم متعامد (نعطي : $\mathrm{F}(7) \simeq 0{,}93$) .

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .