Exercice n°01 :(02 pts)

✓ On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-(1+ax)}{x^2}$, où $a \in \mathbb{R}$.

2 **1.** Déterminer la valeur du paramètre réel a pour laquelle f admet en $x_0 = 0$ Un prolongement par continuité g que l'on déterminera .

Exercice n°02 :(03 pts)

1 **2.** Montrer que l'équation $(E) : 4x^3 - 12x + 1 = 0$ admet une solution Unique dans l'intervalle $]-1,1[$.

2 **3.** En déduire que l'équation $(F) : x^4 - 6x^2 + x = -1$ admet exactement Deux solutions dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice n°03 :(04 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2} .$$

0,5 **4.** Dresser le tableau de variation complet de f .

1,5 **5.** Montrer que l'équation $(G) : f(x) = 0$ admet trois solutions distincts dans $\mathbb{R}$.

6. Soit a une solution de l'équation (G) .

1 - Montrer que : $(\exists\theta \in]0,\pi[), a = \cos(\theta)$ et que $\cos(3\theta) = \dfrac{1}{2}$.

1 **7.** Déterminer les valeurs précises des solutions de l'équation (G) .

Exercice n°04 :(06 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = x - \sin(x) .$$

1 **8.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0,5 **9.** Montrer que la fonction f^{-1} est impaire .

1 **10.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(H) : f^{-1}(x) = f(x)$.

0,75 **11.** Montrer qu'il existe une fonction unique g définie sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), g(x) - \sin(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

E-mail : ammari1042@gmail.com Tel : 0649113323
Réalisé par Mr: ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : Charif al-idrissi / Benslimane / E-mail : abouzakariyamaths@gmail.com Tel : 06-67-74-56-58

1
0,75
1

12. Montrer que la fonction g est paire et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

13. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

14. Déterminer la monotonie de g sur $\mathbb{R}^+$, puis dresser son tableau de Variation sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice n°05 :(05 pts)

1
0,5
1
1
1,5

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}} .$$

15. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

16. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera .

17. Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x\in J$.

18. Montrer que l'équation $(I):f(x)=x$ admet une solution unique α dans Dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in\left]\frac{3}{4},1\right[$.

✓ On considère la fonction G définie sur $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par :

$$G\left(\frac{-1}{2}\right)=0\ ,\ G\left(\frac{1}{2}\right)=2 \text{ et } \left(\forall x\in\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[\right),G(x)=2f\left(\frac{1}{2}\tan(\pi x)\right) .$$

19. Montrer que G est continue sur $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

● Exercices Bonus :

○ Exercice n°01 :

1

✓ Soient a_1 , a_2. . . et a_n des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$ ($n\geq 2$) .

20. Montrer que l'équation $(J):\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}|x-a_k|=\frac{1}{2}$, admet au moins une Solution dans l'intervalle $[0,1]$.

○ Exercice n°02 :

2

✓ Soit f une fonction continue sur un intervalle I , admettant un extremum Local en un point $x_0\in I$.

21. Prouver que : $(\exists(a,b)\in I^2),\ a\neq b\ et\ f(a)=f(b)$.

Exercice n°03 :

2

✓ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tels que :

$$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\left|f(x)-f(y)\right|\leq k\left|x-y\right|,\text{ où } k\in\left]0,1\right[\ .$$

22. Montrer que l'équation : $(K): f(x)=x$ admet une solution unique .

Fin du sujet

Bon courage et bonne Chance