Lycée moussa bno Moussaer - Khémisset	Devoir maison N°03 2ème tranche 2016/2017	1er Bac Sc Mat Int Prof : Abdellah Belkhatir

Exercice n°01 :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2} \; ; \; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

✓ Montrer que f est dérivable en $x_0=0$, puis écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$.

Exercice n°02 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2|x-1|$.

✓ Etudier la dérivabilité f au point $x_0=1$, puis interpréter le résultat Obtenu géométriquement.

Exercice n°03 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+|x+2|-4 \; ; \; x<1 \\ (x-1)\sqrt{x-1} \; ; \; x\geq 1 \end{cases}.$$

1) - a) - Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$.

b) - f est-elle dérivable en $x_0=1$? interpréter géométriquement le résultat.

2) - f est-elle dérivable en $x_0=-2$? interpréter géométriquement le résultat.

Exercice n°04 :

1) - Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de centre x_0.

On suppose que f et g sont dérivables en x_0 et que :

$$f(x_0)=g(x_0)=0 \text{ et } g'(x_0)\neq 0.$$

✓ Montrer que : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

2) - En déduire chacune des limites suivantes :

$$(1):\lim_{x\to 1}\frac{x^5\cos(x-1)-1}{x^3-\sqrt{x}} \text{ et } (2):\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right)-\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(2x)}.$$

Exercice n°05 :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a.

✓ Montrer que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a.f(x)-x.f(a)}{x-a}=a.f'(a)-f(a)$. puis en déduire

La valeur de limite suivante : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a.x^{2017}-a^{2017}.x}{x-a}$.

Exercice n°06 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=(x-1)\sqrt{2-x}.$$

1) - Déterminer D_f, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2) - Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=2$, puis interpréter le résultat.

3) - Montrer que f est dérivable sur $D_f-\{2\}$, et que :

$$(\forall x\in D_f-\{2\}),f'(x)=\frac{-3x+5}{2\sqrt{2-x}}.$$

4) - Etudier le signe de f' sur $D_f-\{2\}$, puis dresser le tableau de variation de f.

5) - Montrer qu'ils existent deux tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe (C_f) passant Par l'origine du repère.

Exercice n°07 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=1-\dfrac{2}{x^2-x}$.

1) - Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2) - Montrer que f est dérivable sur chaque intervalles de D_f et que :

$$(\forall x\in D_f),f'(x)=\frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}.$$

3) - Etudier le signe de f' sur D_f, puis dresser le tableau de variation de f.

4) - a) - Vérifier que : $(\forall x\in D_f),f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

b) - En déduire que : $\left(\forall\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right),\left(1+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\geq 9$.

Quand est ce que l'égalité est réalisée ? justifier votre réponse.

5) - Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, dresser le tableau de variation de la fonction F définie Par : $F(x)=(f(x))^n$.

Exercice n°08 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\sqrt{|x^2-x|}$.

✓ Etudier la dérivabilité f au point $x_0=0$ et $x_0=1$, puis interpréter Géométriquement chaque résultat .

Exercice n°09 :

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{x} ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1)- a)- Etudier sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ le sens de variation des fonctions suivantes :

$$g(x)=x-\sin x \text{ et } h(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}.$$

b)- En déduire que : $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right), x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$.

2)- a)- Montrer que : $\left(\forall x\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right), \left|\frac{\sin x-x}{x}\right|\leq\frac{x^2}{6}$.

b)- En déduire que f est dérivable en $x_0=0$ et donner $f'(0)$.

Exercice n°10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-ax}{x^2-4x+3}$ où $a\in\mathbb{R}$.

1)- Déterminer D_f .

2)- Déterminer les réels a pour lesquels f :

a)- N'admet pas d'extremums .
b)- Admet un minimum et un maximum .
c)- Admet uniquement un minimum .

Exercice n°11 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

1)- Déterminer D_f.

2)- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[), f'(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1+x}}.$$

3)- Dresser le tableau de variation de f , puis en déduire que :

$\left(\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\right), \sqrt{1+\frac{a}{b}}+\sqrt{1+\frac{b}{a}}\geq 2\sqrt{2}$ (dans quel cas à-t-on l'égalité?) .

Exercice n°12 :

Soit ABC un triangle de demi périmètre p et soit R le rayon du cercle circonscrit Au triangle ABC .

✓ Montrer que $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$, puis étudier le cas où l'égalité est réalisée .