التمرين الأول

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ؛النقط $A(-1,1,0)$ و $B(1,0,1)$

و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,-1)$ وشعاعها هو $R=3$.

1 . أ لنبين أن: $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

لدينا : $\overrightarrow{OA}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{OB}(1,0,1)$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(1-0)\vec{i}-(-1-0)\vec{j}+(0-1)\vec{k}$$
$$=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}$

* معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

بما أن: $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\neq\vec{0}$

فإن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(1,1,-1)$ منظمية على المستوى (OAB)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M\in(OAB)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=0\qquad\left(\ \overrightarrow{OM}(x,y,z)\ \right)$$
$$\Leftrightarrow x\times1+y\times1+z\times(-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x+y-z=0$$

إذن : $\boxed{(OAB)\ :\ x+y-z=0}$

طريقة 2

بما أن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(1,1,-1)$ منظمية على المستوى (OAB) ؛ فإن له معادلة ديكارتية على الشكل : $x+y+z+d=0$

ولدينا : $O(0,0,0)\in(OAB)\Leftrightarrow x_O+y_O+z_O+d=0$

$$\Leftrightarrow 0+0+0+d=0$$
$$\Leftrightarrow d=0$$

إذن : $\boxed{(OAB)\ :\ x+y-z=0}$

ب حساب المسافة $d(\Omega;(OAB))$

لدينا : $$d(\Omega;(OAB))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega-z_\Omega|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

إذن : $\boxed{d(\Omega;(OAB))=\sqrt{3}}$

الاستنتاج

بما ان : $d(\Omega;(OAB))=\sqrt{3}<R$ (R شعاع الفلكة (S))

فإن المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

يعني : $r=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

2 . ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω والعمودي على المستوى (OAB)

أ. تمثيل بارامتري للمستقيم (D)

(Δ) عمودي على (OAB) يعني (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n}_{(OAB)}(1,1,-1)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(OAB)\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega M}(x-1;y-1;z+1)$ و $\vec{n}_{(OAB)}(1,1,-1)$ مستقيميتان

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=t.\vec{n}_{(OAB)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}x-1=t\\ y-1=t\\ z+1=-t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-1-t\end{cases}$$

إذن النظمة :

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-1-t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$ هي تمثيلا بارامتري لــ(Δ)

ب. تحديد مثلوث إحداثيات مركز الدائرة (Γ)

طريقة1.

لاحظ أن : $\overrightarrow{O\Omega}(1,1,-1)$ و $\vec{n}_{(OAB)}(1,1,-1)$ إذن $(\Delta)=(O\Omega)$

ومنه المسقط العمودي لــΩ على المستوى (OAB) هو النقطة O وبالتالي مركز الدائرة (Γ) هو O

طريقة2

لتكن H هي مركز الدائرة (Γ) ؛ يعني H هي المسقط العمودي لــ Ω على (OAB) .

وبما أن (Δ) مار من Ω وعمودي على (OAB) فإن H هي تقاطع (Δ)و المستوى (OAB)

$$H\in(\Delta)\cap(OAB)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R};\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=-1-t\\ x+y-z=0\end{cases}$$

ومنه $(1+t)+(1+t)-(-1-t)=0$

يعني : $3t+3=0$

يعني : $t=-1$

إذن : $H(0;0;0)$ (نعوض قيمة t في النظمة أعلاه)

أي مركز الدائرة (Γ) هو النقطة $O(0,0,0)$

التمرين الثاني

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$؛ نعتبر النقط: A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=7+2i$ و $b=4+8i$ و $c=-2+5i$.

1. أ- * لنتحقق من أن : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$

لدينا :

$$(1+i)(-3+6i)=1\times(-3)+1\times(6i)+i\times(-3)+i\times(6i)$$
$$=-3+6i-3i-6$$
$$=-9+3i$$

إذن : $\boxed{(1+i)(-3+6i)=-9+3i}$

- لنبين أن : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$

لدينا :

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{(-2+5i)-(7+2i)}{(4+8i)-(7+2i)}=\frac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i}=\frac{-9+3i}{-3+6i}=\frac{\overbrace{(1+i)\cancel{(-3+6i)}}^{\text{حسب ما سبق}}}{\cancel{(-3+6i)}}=1+i$$

إذن: $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a}=1+i}$

ب- الاستنتاج

- بما أن : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$ فإن : $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$

ومنه $\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$

إذن : $\boxed{AC=AB\times\sqrt{2}}$

- تحديد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

➤ من جهة لدينا : $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(Cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+iSin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

يعني : $\arg(1+i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

➤ ومن جهة ثانية لدينا : $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

ومنه :

$$\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg(1+i)[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

إذن: $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

2 . R الدوران الذي مركزه B وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ لنبين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو : $d = 10+11i$

ملاحظة :
يمكن استعمال مباشرة صيغة التمثيل العقدي للدوران
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$

$$R(A) = D \Leftrightarrow \begin{cases} BA = BD \\ \overline{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{BD}{BA} = 1 \\ \arg\left(\dfrac{d-b}{a-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

ومنه : $\dfrac{d-b}{a-b} = 1 \times e^{\frac{\pi}{2}i}$ (الكتابة الأسية للعدد العقدي $\dfrac{d-b}{a-b}$)

يعني : $d - b = e^{\frac{\pi}{2}i}(a-b)$

يعني : $d = i(a-b)+b$ (لأن $e^{\frac{\pi}{2}i} = Cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + iSin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$)

يعني : $d = i\left(7+2i-(4+8i)\right)+4+8i$

يعني : $d = i(7+2i-4-8i)+4+8i = i(3-6i)+4+8i = 3i+6+4+8i = 10+11i$

إذن : $d = 10+11i$

ب – لنحسب : $\dfrac{d-c}{b-c}$

لدينا :

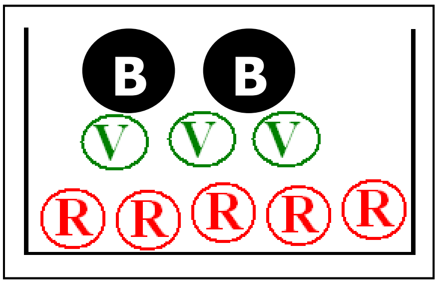
$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{(10+11i)-(-2+5i)}{(4+8i)-(-2+5i)}$$
$$= \frac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i}$$
$$= \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{2(6+3i)}{6+3i} = 2$$

إذن: $\dfrac{d-c}{b-c} = 2$

- الاستنتاج

بما أن : $\frac{d-c}{b-c}=2\in\mathbb{R}$ فإن النقط B و C و D مستقيمية

التمرين الثالث :



يحتوي صندوق على10 كرات : خمس كرات حمراء وثلاث كرات خضراء وكرتان بيضاوان (لايمكن التمييز بينها باللمس)
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق .

بما أن السحب تآني فإن كل سحبة فهي تأليفة ل4عناصر من بين 10 عنصر
إذن : $card(\Omega)=C_{10}^{4}=210$.

1 . الحدث A : " الحصول على كرتين حمراوين وعلى كرتين خضراوين "

يعني : $A=\{\ RRVV\ \}$

لدينا : $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^2\times C_3^2}{210}=\frac{10\times 3}{210}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$

إذن : $p(A)=\frac{1}{7}$

. الحدث B : " لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة " $B=\{\overline{BBBB}\}$

لدينا : $p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_8^4}{210}=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$ إذن : $p(B)=\frac{1}{3}$

.2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ – لنحدد $X(\Omega)$

بعد عملية السحب إما:

- ❖ لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة وفي هذه الحالة : $X=0$
- ❖ توجد كرة واحدة بيضاء وثلاث كرات غير بيضاء وفي هذه الحالة $X=1$
- ❖ توجد كرتان بيضاوان وكرتين غير بيضاوين وفي هذه الحالة $X=2$

وهي الحالات الممكنة لأن عدد الكرات البيضاء هو 2

إذن : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

ب- * لنبين أن : $p(X=1)=\frac{8}{15}$.

لدينا : $(X=1)=\{B\overline{BBB}\}$

ومنه : $p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\frac{2\times8\times7}{210}=\frac{2\times8}{30}=\frac{8}{15}$

إذن : $p(X=1)=\frac{8}{15}$

- قانون احتمال المتغير العشوائي X

➤ لدينا الحدث : $(X=0)$ هو الحدث B

إذن: $p(X=0)=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$

➤ ولدينا :

$p(X=1)=\frac{8}{15}$

➤ ولدينا : $(X=2)=\{BB\overline{B}\overline{B}\}$ ومنه : $p(X=2)=\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{1\times4\times7}{210}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

إذن $p(X=2)=\frac{2}{15}$

خلاصة

x_i	0	1	2	
p_i	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	$p_0+p_1+p_2=\frac{5}{15}+\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=1$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_1=3$ و $u_{n+1}=\frac{25}{10-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1 . * لنتحقق من أن : $5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$5-u_{n+1}=5-\frac{25}{10-u_n}=\frac{5(10-u_n)-25}{10-u_n}=\frac{50-5u_n-25}{10-u_n}=\frac{25-5u_n}{10-u_n}=\frac{5(5-u_n)}{10-u_n}$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$

- لنبين بالترجع أن : $5-u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$

لدينا : $5-u_1=5$ و $5>0$ إذن: $5-u_1>0$

نفترض أن $5-u_n>0$ ونبين أن $5-u_{n+1}>0$.

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $$5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$$

حسب الافتراض لدينا : $5-u_n>0$ إذن : $5(5-u_n)>0$ و $5+(5-u_n)>0$

ومنه : $5-u_{n+1}>0$

إذن حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;5-u_n>0$

2 . نضع : $\mathrm{v}_n=\dfrac{5}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

أ ـ لنتحقق من أن : $\mathrm{v}_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $$\mathrm{v}_{n+1}=\frac{5}{5-u_{n+1}}=\frac{5}{\dfrac{5(5-u_n)}{10-u_n}}=\frac{5(10-u_n)}{5(5-u_n)}=\frac{10-u_n}{5-u_n}$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\mathrm{v}_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

لنتحقق من أن $\mathrm{v}_{n+1}-\mathrm{v}_n=1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

لدينا: $$\mathrm{v}_{n+1}-\mathrm{v}_n=\frac{10-u_n}{5-u_n}-\frac{5}{5-u_n}=\frac{10-u_n-5}{5-u_n}=\frac{5-u_n}{5-u_n}=1$$

إذن : $\mathrm{v}_{n+1}-\mathrm{v}_n=1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ب ـ لنبين أن : $\mathrm{v}_n=n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \mathrm{v}_{n+1}-\mathrm{v}_n=1$

يعني : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \mathrm{v}_{n+1}=\mathrm{v}_n+1$

يعني $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول : $\mathrm{v}_1=\dfrac{5}{5-u_1}=1$

حسب صيغة الحد العام لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\mathrm{v}_n=\mathrm{v}_1+(n-1).r$

يعني : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\mathrm{v}_n=1+(n-1).1=n$

إذن : $\mathrm{v}_n=n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

- الاستنتاج

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{v}_n = \frac{5}{5-u_n} \Leftrightarrow 5-u_n = \frac{5}{\mathrm{v}_n}$$
$$\Leftrightarrow u_n = 5-\frac{5}{\mathrm{v}_n}$$
$$\Leftrightarrow u_n = 5-\frac{5}{n}$$

إذن : $u_n = 5-\dfrac{5}{n}$ ليكن n من $\mathbb{N}^*$

ج- حساب النهاية

➤ لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^* \; ; u_n = 5-\dfrac{5}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

إذن :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(5-\frac{5}{n}\right) = 5-0 = 5$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(x-2)^2 e^x$ و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم : $(O;\vec{i};\vec{j})$ (بحيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$).

1 . أ- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

لدينا : $f(x)=(x-2)^2 e^x$ يعني : $f(x)=(x^2-4x+4)e^x$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty).(+\infty) = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- * : لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

لدينا : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x-2)^2 e^x}{x} = (x-2)^2 \times \dfrac{e^x}{x}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)^2\times\dfrac{e^x}{x}=(+\infty).(+\infty)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

- الاستنتاج

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2 . أ- لنتحقق من أن $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

➤ طريقة 01

ليكن x من $\mathbb{R}$

تـــذكر أن : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$f(x)=(x-2)^2e^x=(x^2-4x+4)e^x=x^2e^x-4xe^x+4e^x$$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$

➤ طريقة 02

ليكن x من $\mathbb{R}$

$$x^2e^x-4xe^x+4e^x=(x^2-4x+4)e^x=(x-2)^2e^x=f(x)$$

ب- * لنبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$

بما أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2e^x-4xe^x+4e^x\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}x^2e^x-4.\lim_{x\to-\infty}xe^x+4.\lim_{x\to-\infty}e^x\\&=0-4\times0+4\times0\\&=0\end{aligned}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

- التأويل الهندسي :

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y=0$ (محور الأفاصيل) مقارب أفقي لـــ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

3 . أ – لنبين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f'(x)=x(x-2)e^x$

تذكر أن : ♦ $(u.v)'=u'.v+u.v'$ و ♦ $(u^n)'=nu^{n-1}$

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على IR كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على IR

ليكن x من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-2)^2 e^x\right)' \\ &= \left((x-2)^2\right)' e^x + (x-2)^2 (e^x)' \\ &= 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x = 2(x-2)e^x + (x-2)(x-2)e^x \\ &= \left(2+(x-2)\right)(x-2)e^x \\ &= x(x-2)e^x \end{aligned}$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; f'(x) = x(x-2)e^x$

ب- رتابة الدالة f

➤ على المجال $]-\infty,0]$

لكل x من المجال $]-\infty,0]$ لدينا : $x \le 0$ و $x-2<0$ ومنه : $x(x-2) \ge 0$

وبما أن : $\forall x \in]-\infty,0] \; ; e^x > 0$ فإن : $x(x-2)e^x \ge 0$. لكل x من المجال $]-\infty,0]$

أي : $\forall x \in]-\infty,0] \; ; f'(x) \ge 0$

وبالتالي f دالة تزايدية على المجال $]-\infty,0]$

➤ على المجال $[2,+\infty[$

لكل x من المجال $[2,+\infty[$ لدينا : $x > 0$ و $x-2 \ge 0$ ومنه : $x(x-2) \ge 0$

وبما أن : $\forall x \in [2,+\infty[\; ; e^x > 0$ فإن : $x(x-2)e^x \ge 0$. لكل x من المجال $[2,+\infty[$

أي : $\forall x \in [2,+\infty[\; ; f'(x) \ge 0$

وبالتالي f دالة تزايدية على المجال $[2,+\infty[$

➤ على المجال $[0,2]$

لكل x من المجال $[0,2]$ لدينا : $x \ge 0$ و $x-2 \le 0$ ومنه : $x(x-2) \le 0$

وبما أن : $\forall x \in [0,2] \; ; e^x > 0$ فإن : $x(x-2)e^x \le 0$. لكل x من المجال $[0,2]$

أي : $\forall x \in [0,2] \; ; f'(x) \le 0$

وبالتالي f دالة تناقصية على المجال $[0,2]$

ملاحظة :

بما أن : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة ثلاثية الحدود : $x(x-2) = x^2 - 2x$

لدينا : $x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ أو $x = 2$

ومنه

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي f' موجبة على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ و سالبة على المجال $[0,2]$

إذن : f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0,2]$

ج. جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ. لنبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f''(x)=(x^2-2)e^x$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f'(x)=x(x-2)e^x=(x^2-2x)e^x$

ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned}f''(x)&=(f'(x))'\\&=((x^2-2x)e^x)'\\&=(x^2-2x)'.e^x+(x^2-2x)(e^x)'\\&=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x\\&=(\cancel{2x}-2+x^2\cancel{-2x})e^x\\&=(x^2-2)e^x\end{aligned}$$

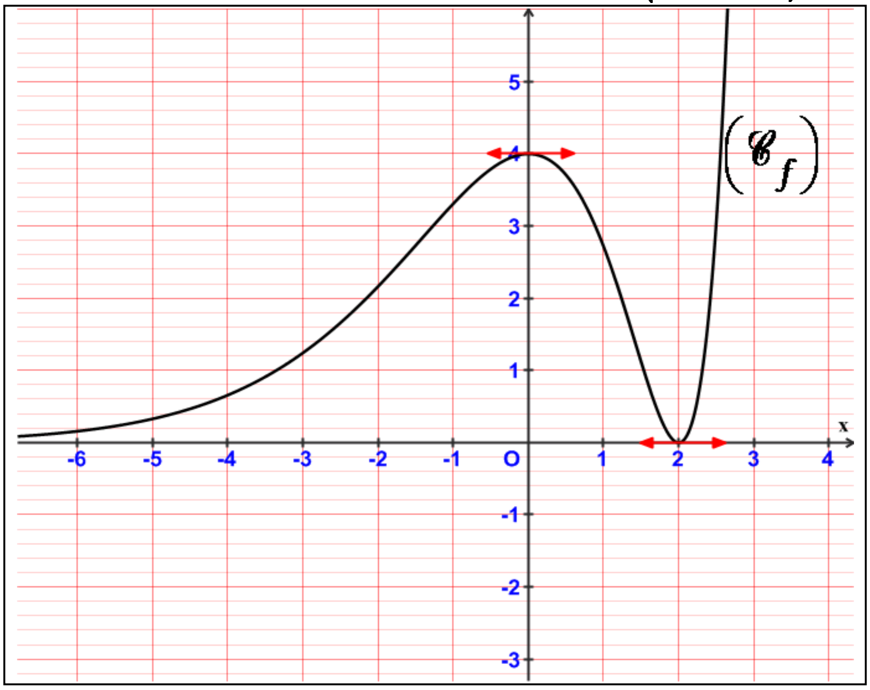
$$\boxed{\text{إذن : }\ \forall x\in\mathbb{R}\ ;f''(x)=(x^2-2)e^x}$$

- الاستنتاج :

$$\begin{aligned}f''(x)=0&\Leftrightarrow(x^2-2)e^x=0\\&\Leftrightarrow x^2-2=0\qquad(\text{لأن : }\forall x\in\mathbb{R};e^x>0)\\&\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\quad\text{او}\quad x=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

بما أن $f''(x)$ تنعدم وتغير الإشارة في $x_0=\sqrt{2}$ و $x_1=-\sqrt{2}$ فإنه للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطتي انعطاف : إحداهما أفصولها $x_0=\sqrt{2}$ و الأخرى أفصولها $x_1=-\sqrt{2}$

ب- إنشاء المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$



5 . أ- لنبين أن الدالة $H : x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

ليكن x من $\mathbb{R}$

$$H'(x) = \left((x-1)e^x\right)'$$ (H دالة قابلة للاشتقاق على IR كجداء داتين قابلتين للاشتقاق على IR)

$$= (x-1)'e^x + (x-1)\left(e^x\right)'$$

$$= e^x + (x-1)e^x$$

$$= (1+x-1)e^x$$

$$= xe^x$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; H'(x) = xe^x = h(x)$

وبالتالي : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

* حساب التكامل $\int_0^1 xe^x dx$

لدينا : $\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 h(x)dx = \left[H(x)\right]_0^1$ (H دالة أصلية للدالة h)

$$= H(1) - H(0)$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$

إذن : $\int_0^1 xe^x dx = 1$

ب- لنبين أن : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

نضع : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=x^2 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=2x \end{cases}$ مع u و v دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[0,1]$

لدينا :

$$\int_0^1 x^2e^x dx=\left[u(x).v(x)\right]_0^1-\int_0^1 v'(x)u(x)dx$$

$$=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx$$

$$=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx \qquad (\text{الخطانية})$$

$$=\left(1^2.e^1-0^2.e^0\right)-2\times 1 \qquad (\text{حسب السؤال أ-})$$

$$=e-2$$

إذن : $\boxed{\int_0^1 x^2e^x dx=e-2}$

ج- حساب مساحة الحيز المستوي Δ المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$

بما أن : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

فإن وحدة قياس المساحة هي : $ua=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=(1cm)\times(1cm)=1cm^2$

لدينا :

$$\mathscr{A}(\Delta)=\int_0^1|f(x)|dx \quad ua$$

$$=\int_0^1\left|(x-2)^2e^x\right|dx \quad ua$$

$$=\int_0^1(x-2)^2e^x dx \quad ua \qquad \left(\text{لأن : } \forall x\in[0,1];(x-2)^2e^x>0\right)$$

$$=\int_0^1\left(x^2e^x-4xe^x+4e^x\right)dx \quad ua$$

$$=\int_0^1 x^2e^x dx-4\int_0^1 xe^x dx+4\int_0^1 e^x dx \quad ua \qquad (\text{الخطانية})$$

وحيث أن : $\int_0^1 x^2e^x dx=e-2$ و $-4\int_0^1 xe^x dx=-4$ و $4\int_0^1 e^x dx=4\left[e^x\right]_0^1=4(e-1)$

فإن :

$$\mathscr{A}(\Delta)=e-2-4+4(e-1) \quad ua$$

$$=5e-10 \quad ua$$

إذن : $\boxed{\mathscr{A}(\Delta)=5(e-2)cm^2}$

6 . تحديد عدد حلول المعادلة $x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

ليكن x من $\mathbb{R}$

$$x^2 = e^{-x} + 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^x} + 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1 + 4xe^x - 4e^x}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 e^x = 1 + 4xe^x - 4e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1$$

ليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = 1$

عدد حلول المعادلة $x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 = e^{-x} + 4x - 4$ هو عدد نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ)

وبالاستعانة بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نجد (Δ) يقطعه في ثلاث نقط إذن عدد الحلول هو: ثلاثة حلول