أولمبـيـاد الرياضـيـات الجـهـوية – الثـانـيـة إعدادي

2^e

الفرض الأولـــــ – الجمعة 23 دجنـبـر 2022 – من 14:30 إلى 17:00

EXERCICE 1 (5 points)

Déterminer les nombres réels a, b et c sachant que :

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5} \text{ et } abc=810$$

التمـرين 1 (6 نقـط)

حدد الأعداد الحقيقية a و b و c علـما أن :

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5} \text{ و } abc=810$$

EXERCICE 2 (5 points)

On considère des nombres x, y et z deux à deux distincts tels que :

$$xyz>0 \text{ et } x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$$

① **a.** Montrer que $x-y=\frac{y-z}{yz}$ et écrire les deux autres égalités analogues.

b. Montrer que $(xyz)^2=1$ puis déduire la valeur de xyz

② **a.** Montrer que $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}$

En déduire que $(x-1)\left(x+1+\frac{1}{y}\right)=0$

b. On suppose que $x=-2$. Calculer les valeurs de y et z.

التمـرين 2 (5 نقـط)

نعتـبر أعداد x و y و z مختلفة مثـنى مثـنى بحيث :

$$xyz>0 \text{ و } x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$$

① **أ.** بيّن أن $x-y=\frac{y-z}{yz}$ واكتـب المتسـاويتـين المماثِـلتين

ب. بيّن أن $(xyz)^2=1$ ثم استنتج قيمة xyz

② **أ.** بيّن أن $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}$

استنتج أن $(x-1)\left(x+1+\frac{1}{y}\right)=0$

ب. نفتـرض أن $x=-2$. احسب y و z

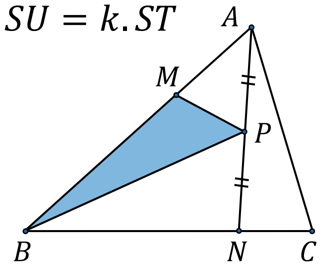
EXERCICE 3 (5 points) $\mathcal{A}_{XYZ}$ désigne l'aire d'un triangle XYZ

① RST un triangle et U un point du segment $[ST]$ tel que $SU=k.ST$ (avec $0<k<1$). Montrer que : $\mathcal{A}_{RSU}=k\,.\mathcal{A}_{RST}$

② Dans la figure ci-contre :

P est le milieu de $[AN]$, $BN=\frac{3}{4}BC$ et $BM=\frac{2}{3}\,BA$

Montrer que $\mathcal{A}_{PBM}=\frac{1}{4}\,\mathcal{A}_{ABC}$



التمـرين 3 (5 نقـط) $\mathcal{A}_{XYZ}$ يرمز لمساحة مثلث XYZ

① RST مثلث، و U نقطة من القطعة $[ST]$ بحيث $SU=k.ST$ (مـع $0<k<1$). بيّن أن : $\mathcal{A}_{RSU}=k\,.\mathcal{A}_{RST}$

② في الشكل جانبه :

P هي منتصف القطعة $[AN]$ ، و $BN=\frac{3}{4}BC$ و $BM=\frac{2}{3}\,BA$

بيّن أن $\mathcal{A}_{PBM}=\frac{1}{4}\,\mathcal{A}_{ABC}$

EXERCICE 4 (5 points)

Montrer que parmi 11 entiers naturels quelconques on peut en trouver deux, a et b, tels que $a-b$ soit divisible par 10.

التمـرين 4 (4 نقـط)

بيّن أن من بـيـنِ 11 عددا صحـيـحا طبـيعيا، يمكِن أن نَـجِـد عددَين a و b بحـيث $a-b$ يقـبل القِـسمـة على 10.

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين، جهة مراكش – آسفي
مديرية الرحامنة الإقليمية

أولمبياد الرياضيات الجهوية – الثانية إعدادي – الفرض الأول – عناصر الحل

2e

Pour les quatre exercices, toute autre méthode correcte est naturellement considérée comme valable.

EXERCICE 1 *(5 points)*

On pose : $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k$, donc $abc=2\times3\times5\times k^3=810$, donc $k^3=27$ ....(2 pts)

Donc $k=3$ et de $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=3$ on tire : $a=6$, $b=9$ et $c=15$ ....(3 pts)

EXERCICE 2 *(5 points)*

❶ **a.** De $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ on tire : $x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}$ donc $x-y=\frac{y-z}{yz}$ (i) ....(1 pt)

De même (permutation circulaire) $y-z=\frac{z-x}{zx}$ (ii) et $z-x=\frac{x-y}{xy}$ (iii) ....(0,5 pt)

b. On multiplie (i), (ii) et (iii) membre à membre et on simplifie (car x, y et z deux à deux distincts).

On obtient $\frac{1}{(xyz)^2}=1$ donc $(xyz)^2=1$ par suite $xyz=1$ car $xyz>0$ ....(1 pt)

❷ **a.** On a : $x-\frac{1}{x}=z-\frac{1}{y}$ avec $z=\frac{1}{xy}$ et donc $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}$ ....(0,5 pt)

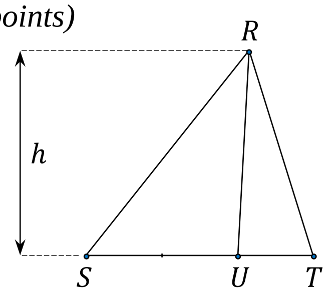
• On a : $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}-1\right)$ donc $\frac{x^2-1}{x}+\frac{1}{y}\times\frac{x-1}{x}=0$ donc $(x-1)(x+1)+\frac{1}{y}(x-1)=0$

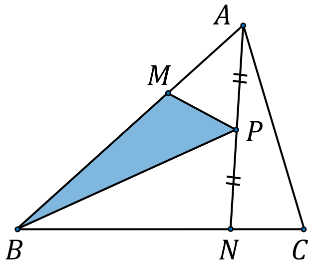
Ainsi : $(x-1)\left(x+1+\frac{1}{y}\right)=0$ ....(1 pt)

b. Pour $x=-2$ on a $x-1\neq0$ donc $x+1+\frac{1}{y}=0$ donc $-1+\frac{1}{y}=0$ donc $y=1$ ....(0,5 pt)

$xyz=1$ s'écrit $-2\times1\times z=1$ donc $z=-\frac{1}{2}$ ....(0,5 pt)

EXERCICE 3 *(5 points)*





❶ $\mathcal{A}_{RSU}=SU.\frac{h}{2}=k\left(ST.\frac{h}{2}\right)=k.\mathcal{A}_{RST}$ (Dans la figure on a pris $SU=\frac{2}{3}ST$)...............................(2 pts)

❷ On a successivement :

$\mathcal{A}_{ABN}=\frac{3}{4}\mathcal{A}_{ABC}$ (i) $\mathcal{A}_{BAP}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{BAN}$ (ii) $\mathcal{A}_{PBM}=\frac{2}{3}\mathcal{A}_{PBA}$ (iii)..................(1,5 pt)

En multipliant membre à membre les égalités (i), (ii) et (iii) : $\mathcal{A}_{PBM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABC}$.......(1,5 pt)

EXERCICE 4 *(5 points)*

Le chiffre des unités d'un entier naturel quelconque est soit 0 soit 1 soit 2 soit 3 soit 4 soit 5 soit 6 soit 7 soit 8 soit 9 (10 possibilités)...(2 pts)

Avec 10 possibilités (10 tiroirs), et 11 entiers naturels, il existe (au moins) deux de ces entiers, a et b qui ont le même chiffre des unités. Ainsi, $a-b$ sera divisible par 10 ....(3 pts)