الدّوال اللوغاريتمية و الأسّية

2 اقتصاد و محاسبة 1

ذ: توفيق بنعمرو

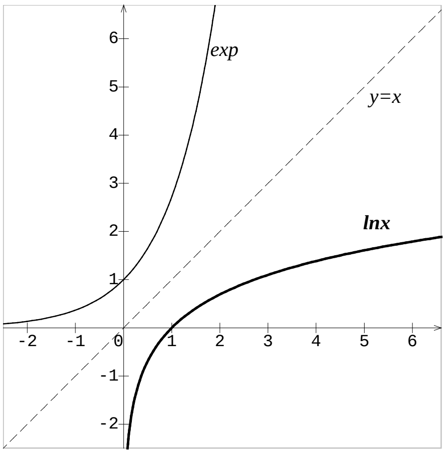
الدالة الأصلية للدالة: $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1 هي دالة اللوغارتم النبيري: $x \mapsto \ln(x)$.

الدالة $\ln$ معرّفة و متصلة و قابلة للاشتقاق و تزايدية قطعاً على $]0\,,+\infty[$.

الدالة العكسية للدالة $\ln$ على $]0,+\infty[$ هي الدالة الأسية: $x \mapsto e^x$

الدالة الأسية e^x معرّفة و متصلة و قابلة للاشتقاق و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0+} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x\to0+} x\cdot\ln(x) = 0^-$$
$$n\in\mathbb{N}^*:\begin{cases}\lim\limits_{x\to0+} x^n\cdot\ln(x) = 0^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+\end{cases}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \;;\; \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



$$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$$
$$e^{(\ln x)} = x \;,\; x>0 \qquad \ln(e^x) = x \;,\; x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = 0^-$$
$$n\in\mathbb{N}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\cdot e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty\end{cases}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\ln(e) = 1 \;;\; \ln(1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\ln(x)>0 &\Leftrightarrow x>1\\
\ln(x)=0 &\Leftrightarrow x=1\\
\ln(x)<0 &\Leftrightarrow 0<x<1\\
\ln(x)>1 &\Leftrightarrow x>e\\
\ln(x)=1 &\Leftrightarrow x=e\\
\ln(x)<1 &\Leftrightarrow 0<x<e
\end{aligned}$$

$$a>0 \;;\; b>0$$
$$\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$$
$$\ln(a)<\ln(b) \Leftrightarrow a<b$$

$$e^1 = e \approx 2{,}7182 \;;\; e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R}:\; e^x>0\\
&x>0 \Leftrightarrow e^x>1\\
&x=0 \Leftrightarrow e^x=1\\
&x<0 \Leftrightarrow 0<e^x<1
\end{aligned}$$

$$a\in\mathbb{R} \;;\; b\in\mathbb{R}$$
$$e^a = e^b \Leftrightarrow a=b$$
$$e^a < e^b \Leftrightarrow a<b$$

$$x>0\;,\;y>0$$
$$\ln(x\times y) = \ln(x)+\ln(y)$$
$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x)-\ln(y) = -\ln(\frac{y}{x})$$
$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$
$$\forall r\in\mathbb{Q}^*: \ln(x^r) = r\cdot\ln(x)$$
$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x)$$
$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\cdot\ln(x)$$

$$x\in\mathbb{R}\;,\;y\in\mathbb{R}$$
$$e^x\cdot e^y = e^{(x+y)}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{(x-y)}$$
$$e^{(-x)} = \frac{1}{e^x}$$
$$\forall r\in\mathbb{Q}^*:\; (e^x)^r = e^{(r\cdot x)}$$
$$\sqrt{e^x} = e^{(\frac{1}{2}\cdot x)}$$
$$\sqrt[n]{e^x} = e^{(\frac{1}{n}\cdot x)}$$

اللوغارتم للأساس a

$$a>0\;,\;a\neq1$$
$$\forall x>0:\; \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$
$$\log_a(1)=0 \;;\; \log_a(a)=1$$
$$\log_a(a^r) = r$$
$$\log_a(x) = b \Leftrightarrow x = a^b$$
$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

اللوغارتم العشري

$$\forall x>0:\; \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$
$$\log(1)=0 \;;\; \log(10)=1$$
$$\log(0{,}1) = -1$$
$$\log(10^r) = r$$
$$(\log(x))' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln10}$$

$$x>0: (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$f(x)>0: \big(\ln\; f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$u(x)\neq0: (\ln(|u(x)|))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(e^{u(x)})' = u'(x)\cdot e^{u(x)}$$

الدالة الأسية للأساس a

$$a>0\;,\;a\neq1$$
$$\forall x\in\mathbb{R}:\; a^x = e^{(x\cdot\ln a)}$$
$$a^0 = 1\;;\; a^1 = a$$
$$a^x = t \Leftrightarrow x = \log_a(t)$$
$$10^x = t \Leftrightarrow x = \log(t)$$
$$(a^x)' = (\ln a)\cdot a^x$$

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ولا تنعدم عليه. الدوال الأصلية للدالة: $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال: $x \mapsto \ln(|u(x)|)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$