

Durée : 02h

في كل ما يلي المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

■ **التمرين رقم 01: (06pts)**

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]0; \pi[$.

و نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $(E): z^2 - 2(\sin \alpha)z + 2(1 + \cos \alpha) = 0$.

(1)- حدد الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) بحيث $\text{Im}(z_1) \geq \text{Im}(z_2)$. (1,5pts)

(2)- أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكلهما المثلثي. (1,5pts)

(3)- نعتبر في المستوى العقدي (P) النقطة M_1 ذات اللق z_1 و النقطة M_2 ذات اللق z_2 .

أ- ما هي طبيعة المثلث OM_1M_2 ؟ علل جوابك. (1,5pts)

ب- حدد α لكي يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع. (1,5pts)

■ **التمرين رقم 02: (07pts)**

I- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} ، المعادلة:

$$(E): z^3 - (1 + i\sqrt{3})z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})z - 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

(1)- علما أن المعادلة (E) تقبل حلين متقابلان حدد حلولها. (2pts)

(2)- أكتب كل حل من حلول المعادلة (E) على شكله المثلثي. (1,5pts)

II- نعتبر العدد العقدي $a = 1 + i\sqrt{3}$ و المجموعة (Δ) للنقطة M ذات اللق z بحيث: $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$.

(1)- بين أن (Δ) مستقيم يمر من النقطة B ذات اللق $b = \sqrt{3} + i$. (1,5pts)

(2)- لتكن $M(z)$ نقطة من (Δ) مخالفة للنقطة B و M' النقطة ذات اللق z' بحيث: $z' = a\bar{z} - b$.

← بين أن: $\frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} \in \mathbb{R}^{*+}$ و استنتج منصف الزاوية \hat{B} في المثلث MBM' . (2pts)

■ التمرين رقم 03: (07pts)

I- ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

و f_a التطبيق المعرف من $\mathbb{C} - \{a\}$ نحو $\mathbb{C} - \{a\}$ المعرف بما يلي : $f_a(z) = \frac{az}{z-a}$.

(1) - بين أن : $f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$: (1,5pts)

(2) - ليكن z من $\mathbb{C} - \{a\}$ ، نضع : $|z-a| = r$ و $\arg(z-a) \equiv \theta[2\pi]$.

← احسب $|f_a(z) - a|$ بدلالة r و $|a|$ و $\arg(f_a(z) - a)$ بدلالة θ و $\arg(a)$. (1,5pts)

II- نأخذ فيما يلي : $a = -1 + i$ ، و نعتبر في المستوى (P) مجموعات النقط التالية :

$(E) = \{M(z) \in (P) / f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$ و $(C) = \{M(z) \in (P) / |f_a(z) - a| = 2\}$

و $(D) = \left\{ M(z) \in (P) / \arg(f_a(z) - a) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \right\}$.

(1) - حدد كلا من (E) و (C) ، و بين أن (D) نصف مستقيم طرفه $A(a)$ محروم من $A(a)$

محددا معادلة ديكارتيية له . (1,5pts)

(2) - ليكن z_0 من $\mathbb{C} - \{a\}$ و النقطة B ذات اللحق z_0 بحيث B تنتمي إلى تقاطع (C) و (D) .

أ- اكتب $f_a(z_0)$ على الشكل الجبري ثم استنتج z_0 . (1pt)

ب- أرسم كلا من (C) و (E) و (D) في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) . (1,5pts)

إنتهى الموضوع .

← تخصص نقطتان إضافيتان لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .