| 2 بكالوريا علوم رياضية | تجريبي مادة الرياضيات | ثانوية موسى بن نصير |
|---|---|---|
| مدة الإنجاز : أربع ساعات | دورة فبراير 2014 | نيابة الخميسات |
| المعامل : 09 | | |

## ■ التمرين رقم 01: ( 03 نقط )

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k}$$ ، حيث $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ .

0,5 | 1)- بين أن : $\int_0^1\frac{1}{x^2-2x\cos(\theta)+1}dx=\frac{\pi-\theta}{2\sin\theta}$ .

0,5 | 2)- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، بين أن : $(\forall x\in[0,1]);\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\frac{x^ne^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}}+\sum_{k=0}^{n-1}x^ke^{ik\theta}$ .

0,5 | 3)- بين أن : $(\forall x\in[0,1]);\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\theta}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$ .

0,75 | 4)- إستنتج أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{\pi-\theta}{2}-\int_0^1\frac{x^n\left[\left(\sin(n+1)\theta\right)-x\sin(n\theta)\right]}{x^2-2x\cos(\theta)+1}dx$ .

0,5 | 5)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\left|\int_0^1\frac{x^n\left[\left(\sin(n+1)\theta\right)-x\sin(n\theta)\right]}{x^2-2x\cos(\theta)+1}dx\right|\leq\frac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}$ .

0,25 | 6)- إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ معللا جوابك .

## ■ التمرين رقم 02: ( 3,25 نقطة )

⇦ في المستوى العقدي $(\mathrm{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر

النقط : $A(1)$ و $B(-1)$ و $C(i)$ و نربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-1}{z+1}$ .

0,5 | 1)- بين أنه إذا كانت $M(z)\in C(O,1)-\{B\}$ فإن : $M'(z')\in(Oy)$ .

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E}):z^2-2e^{i\theta}z+1=0$ ، حيث $\theta\in]0,\pi[$ .

0,5 | أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $a=e^{i\theta}-1$ على شكليهما الأسي .

0,25 | ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{E})$ .

3)- نعتبر النقطتين $M_1$ و $M_2$ اللتان لحقاهما على التوالي :

$$z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin\theta}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$ و $$z_2=e^{i\theta}-\sqrt{2\sin\theta}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$ .

0,5 | أ- تحقق من أن : $\mathrm{Im}(z_1)\neq0$ .

0,5 | ب- إستنتج أن النقط $A$ و $B$ و $M_1$ غير مستقيمية .

0,5 | ج- بين أن : $\frac{z_1'}{z_2'}=-1$ ، ثم إستنتج أن النقط $A$ و $B$ و $M_1$ و $M_2$ متداورة .

0,5 | د- بين أن : $e^{i\theta}-i=-2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ ، ثم إستنتج أن النقطة $M_1$ تنتمي إلى

دائرة $(C)$ ينبغي تحديد شعاعها و لحق مركزها .

■ **التمرين رقم 03:** ( 3,75 نقطة )

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(\mathrm{E}): z^3-2(1-i)z^2-8iz+16(1+i)=0$$

**1**)- أ- بين أنه إذا كان للمعادلة $(\mathrm{E})$ حلين مترافقين $z_0$ و $\overline{z_0}$ فإن $z_0$ حل للمعادلة : 0,5

$(\mathrm{E_1}): z^2-4z+8=0$ .

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{E})$ علما أنها تقبل حلين مترافقين . 0,5

ج- أكتب حلول المعادلة $(\mathrm{E})$ على الشكل الأسي . 0,5

**2**)- أ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathrm{E_2}): z^9-2(1-i)z^6-8iz^3+16(1+i)=0$ . 0,5

ب- تحقق من أن : $\left[z^9-2(1-i)z^6-8iz^3+16(1+i)\right]\times\left[z^3+2(1-i)\right]=z^{12}+64$ . 0,25

ج- أوجد مرة أخرى حلول المعادلة $(\mathrm{E_2})$ . 0,5

**3**)- نعتبر الحدودية : $\mathrm{P}(z)=z^{12}+64$ .

أ- عمل الحدودية $\mathrm{P}(z)$ إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى . 0,25

ب- بين أن : $(\forall\theta\in\mathbb{R});e^{i\theta}+1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ . 0,25

ج- أحسب $\mathrm{P}(-\sqrt{2})$ ، ثم إستنتج أن : $\prod_{k=0}^{11}\cos\left(\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2^{11}}$ . 0,5

■ **التمرين رقم 04:** ( 4،5 نقطة )

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $\mathrm{F}_n$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);\mathrm{F}_n(x)=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^{-nt}}dt \ .$$

**1**)- بين أن : $(\forall t\in\mathbb{R}^+);\frac{e^t}{1+e^{-nt}}\geq\frac{1}{2}e^t$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}_n(x)$ . 0,5

**2**)- أ- بين أن الدالة $\mathrm{F}_n$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ . 0,5

ب- إستنتج أنه : $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists!u_n\in\mathbb{R}^+);\int_0^{u_n}\frac{e^t}{1+e^{-nt}}dt=1$ ، ثم أحسب $u_0$ . 0,5

**3**)- أ- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة . 0,5

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});e^{u_n}-2=\int_0^{u_n}\frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{-nt}}dt$ . 0,5

ج- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});0\leq e^{u_n}-2\leq\frac{1}{n}e^{u_n}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ . 0,5

**4**)- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :

$(\forall n\in\mathbb{N});n\left(e^{u_n}-2\right)=\ln 2-e^{u_n}\ln\left(1+e^{-nu_n}\right)+\int_0^{u_n}e^t\ln\left(1+e^{-nt}\right)dt$ . 0,5

ب- بين أن : $(\forall u\in\mathbb{R}^+);\ln(1+u)\leq u$ ، ثم أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(e^{u_n}-2\right)=\ln 2$ . 0,5

ج- بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(u_n-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2$ . 0,5

■ **التمرين رقم 05:** ( 5,5 نقطة )

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$F(0)=0$ و $F(1)=\ln 2$ و $\left(\forall x\in ]0,1[\cup]1,+\infty[\right);F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt$ .

| | |
|---|---|
| 0,5 | **1**)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in ]0,1[\right);\frac{x^2-x}{2\ln x}\le F(x)\le\frac{x^2-x}{\ln x}$ . |
| 0,5 | ب- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق F على اليمين في الصفر . |
| 0,75 | **2**)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in ]1,+\infty[\right);x\ln 2\le F(x)\le x^2\ln 2$ و أن : $\left(\forall x\in ]0,1[\right);x^2\ln 2\le F(x)\le x\ln 2$ . |
| 0,5 | ب- إستنتج أن الدالة F متصلة في $x_0=1$ . |
| 0,5 | ج- بين أن المنحنى $(C_F)$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في إتجاه ينبغي تحديده . |
| 1 | **3**)- أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن : $\left(\forall x\in ]0,1[\cup]1,+\infty[\right);F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$. |
| 0,5 | ب- إستنتج منحى تغيرات الدالة F على المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ . |
| 0,75 | **4**)- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن F قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ و أن : $F'(1)=1$ . |
| 0,5 | **5**)- ضع جدول تغيرات F ، ثم أرسم المنحنى $(C_F)$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ . |

■ **تمرين إضافي رقم 01:**

| | |
|---|---|
| 1 | ✚ أحسب التكامل : $I=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$ ( يمكنك وضع : $t=x-\frac{1}{x}$ ) . |

■ **تمرين إضافي رقم 02:**

| | |
|---|---|
| 1 | ✚ بين أنه : $\left(\forall a\in\mathbb{C}-[-1,1]\right)(\exists! b\in\mathbb{C});\begin{cases}a=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\\ \lvert b\rvert>1\end{cases}$ . |

■ **تمرين إضافي رقم 03:**

⇦ في المستوى العقدي $(P)$ نعتبر النقط $A(z)$ و $B(z^2)$ و $C(z^3)$ ، حيث $z\in\mathbb{C}$ .

| | |
|---|---|
| 2 | ✚ حدد شرطا كافيا و لازما لكي يكون $ABC$ مثلثا مركز تعامده النقطة $O$ أصل المعلم . |

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

**Bon courage et bonne chance**