$2^{ème}$ année du baccalauréat Sciences Mathématiques — **lycée Ibn Abdoun-Khouribga**

Durée : 2h — **Devoir surveillé n°1 – le 26/11/2020** — **Mr.EL ABBASSI Med**

Il sera tenu compte de la rédaction, de la rigueur et de la présentation de la copie lors de la correction

Exercice 1 (7.25 pts)

Considérons la fonction f définie par $f(x) = Arc\tan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$

0.25pt 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .

0.5pt 2) a-Montrer que f est strictement croissante sur D_f.

1,5pts b- Montrer que f réalise une bijection de D_f vers un intervalle J à déterminer.

3) Soit $x \in D_f$, posons $\sqrt{x} = \tan\alpha$, avec $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2pts a- Vérifier que $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

1pt b- Montrer que $\left(\forall x \in D_f\right) \quad f(x) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}Arc\tan\left(\sqrt{x}\right)$.

0. 5pt c- Résoudre dans D_f l'équation $f^{-1}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = x$

1,5pts 4) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 2 (6 pts)

1pt 1) Considérons la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = Arc\tan\left(\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}\right)$.

Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité en 0.

2) Soit f le prolongement par continuité de g en 0.

1pt a- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

1pt b- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

1,5pt c- Montrer que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, puis déduire qu'elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

1.5pt d- Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice3 (6.75)

Pour tout $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, considérons la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1pt 1) a-Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $]0,1]$.

0.5pt b- Donner la valeur de u_2.

0.75pt c- Montrer que $0.25 \langle u_3 \langle 0.5$.

2) Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie.

1pt a- Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in]0,1]$.

1.5pt b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, puis déduire quelle est convergente

1pt c- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.

1pt d- Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.