Exercice n°01 :(1,5 pts)

1,5

✓ On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)} - \dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}$.

1. Déterminer D_f , puis montrer que f admet en $x_0 = 1$ un prolongement par continuité g que l'on déterminera .

Exercice n°02 :(03 pts)

✓ Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right) .$$

1 **2.** Calculer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

1 **3.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

1 **4.** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°03 :(09 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty, 1]$ par :

$$f(0) = \frac{-1}{2} \text{ et } f(x) = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} , x \neq 0 .$$

1 **5.** Montrer que f est continue sur I .

1,5 **6.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

1 **7.** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1,5 **8.** pour tout $x \in I$, on pose : $h(x) = \left(2f(x)+1\right)^3$.
Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle H que l'on déterminera et expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in H$.

1 **9.** Montrer que l'équation $(E) : f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$.

✓ Soit G la fonction définie sur $K = \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$$G\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \left(\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]\right), G(x) = f(\tan x) .$$

Réalisé par Mr: ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : Charif al-idrissi / Benslimane / E-mail : abouzakariyamaths@gmail.com Tel : 06-67-74-56-58

1,25	**10.** Montrer que G est continue sur K .
1	**11.** Montrer que G admet une bijection réciproque G^{-1} définie sur un intervalle L que l'on déterminera .
0,75	**12.** Expliciter $G^{-1}(x)$ pour tout $x \in L$.

Exercice n°04 :(6,5 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 14 .$$

1	**13.** Dresser le tableau de variation complet de f .
1,25	**14.** Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{5}{2} < \alpha < 3$.
0,5	**15.** En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

✓ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$g(x) = x^2 - 3x + \frac{2}{x-2} .$$

1,25	**16.** Dresser le tableau de variation complet de g .
1	**17.** Montrer que : $g(\alpha) = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - 4\alpha + 9}{\alpha - 2}$, puis en déduire que $g(\alpha) > 0$.
1	**18.** Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 0$ admet une solution unique b dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < b < 0$.
0,5	**19.** En déduire le signe de g sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

Exercices Bonus :

Exercice n°01 :

✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$.

1	**20.** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n \geq \frac{n}{2}$, puis en déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°02 :

2	**21.** Montrer que la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1}{m\left(1-\sqrt[m]{x}\right)} - \dfrac{1}{n\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}$ admet en $x_0 = 1$ un prolongement par continuité (où $m \geq 2$ et $n \geq 2$ et $m \neq n$) .

Exercice n°03 :

2

✓ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ tels que : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

On suppose de plus que est dérivable à droite de $x_0=0$ et à gauche de $x_1=1$

Et que : $f'_d(0)=f'_g(1)=0$.

22. Montrer que l'équation : $(E): f(x)=x$ admet au moins une solution

Dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice n°04 :

2

✓ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ tels que :

$$f(0)=f(1)=0 \text{ et } \left(\forall x\in\left[0,\frac{7}{10}\right]\right), f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x) .$$

23. Montrer que l'équation : $(E): f(x)=0$ admet au moins sept racines

Dans l'intervalle $[0,1]$.

Fin du sujet

Bon courage et bonne Chance

Réalisé par Mr: ABDELLAH BELKHATIR / Lycée : **Charif al-idrissi** / **Benslimane** / **E-mail :** abouzakariyamaths@gmail.com Tel : 06-67-74-56-58