ثانوية موسى بن نصير	الحساب التكاملي	الثانية بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	فرض تجريبي 2012/2011	ذ : عبدالله بن لختير

Durée:02h

التمرين رقم 01:

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

1)- أحسب كلا من I_0 و I_1 و I_2 .

2)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});I_{n+1}=(n+1).I_n-1$ ، وإستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});I_n=n!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

4)- أحسب نهاية المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N});a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

5)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});I_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

6)- ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=\alpha$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=(n+1).u_n-1$.

- حدد شرطا كافيا و لازما على α لكي تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة (محددا نهايتها) .

التمرين رقم 02:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ ;\ x\neq 0 \text{ و } f(0)=\frac{-1}{2}$$.

و لكل $x\in]-1;+\infty[$ ، نضع : $F(x)=\int_0^x\frac{t^3}{1+t}dt$.

1)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);0\le F(x)\le\frac{x^4}{4}$ و $(\forall x\in]-1;0]);0\le F(x)\le\frac{x^4}{4(1+x)}$.

2)- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}$ و $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$.

3)- بين أن : $(\forall t\in\mathbb{R}-\{-1\});\frac{t^3}{1+t}=1-t+t^2-\frac{1}{1+t}$.

4)- إستنتج أن : $(\forall x\in]-1;+\infty[);\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-F(x)$.

5)- باستعمال النتائج السابقة ، أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة f في الصفر .

التمرين رقم 03:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$.

1)- أ- بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب- بين أن المعادلة : $(E):f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ بحيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

2)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $I_n=\int_0^{\alpha}\left[f(x)\right]^n dx$.

أ- أحسب التكامل I_1 (بدلالة α) .

ب- تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=f(x)-\left[f(x)\right]^2$.

ج- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}-\alpha^n\right)$.

د- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية و موجبة ، ماذا تستنتج ؟

هـ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\frac{\alpha}{2^n}\le I_n\le\alpha^{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});I_n=-\ln\left[2(1-\alpha)\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k}-\alpha^k\right)$.

ب- إستنتج النهاية : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k}-\alpha^k\right)$.

2)- أ- أرسم في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنيي الدالتين f و f^2 .

ب- أحسب بدلالة α مساحة الحيز المستوي المحصور بين منحنيي الدالتين f و f^2 و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته : $x=\alpha$.

إنتهى الموضوع .