Filière : 1BSM-BIOF	Des notions de logique	Série de TD N°1
Année scolaire : 2017-2018	مبادئ في المنطق	Prof : Mohamed iaalou

Exercice N°1 :

Ecrire en utilisant les quantificateurs et donner la négation de chacune des propositions suivantes :

1. Il existe un entier naturel plus grand que tous les nombre réels.
2. Pour tout réel x, il existe un rationnel r plus petit que x.
3. Chaque réel x est compris entre deux entiers relatifs consécutifs uniques.
4. Tout nombre rationnel a, s'écrit sous la forme $a=\frac{p}{q}$, tel que $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.
5. Pour tout réel y et pour tout réel x strictement positif, il existe un entier n non nul tel que $y\leq nx$

Exercice N°2 :

Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes :

1- $(\forall x\in\mathbb{R}),(\exists n\in\mathbb{N})/\, n>x$.

2- $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<y\Rightarrow\exists a\in\mathbb{Q}/\, x<a<y$.

3- $\exists! k\in\mathbb{Z}/-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$

4- $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}/\, y^2-xy-1=0$

Exercice N°3 :

Montrer par récurrence que :

1- $\forall n\in\mathbb{N}: 1\times2+2\times3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2- $\forall n\in\mathbb{N}^*: \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k k=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$

3- $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{n}{2^{n-1}}\leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Exercice N°4 :

Soit α un réel positif. Montrer que :

1- $\forall n\in\mathbb{N},(1+\alpha)^n\geq1+n\alpha$.

2- $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\},(1+\alpha)^n\geq1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$.

3- $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\},\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\geq\frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$.

4- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}, 2^n>n$

Exercice N°5 :

Soit x un réel différent de 1 .

1- Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}, 1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2- Simplifier la somme $S=1+2+2^2+...2^{2017}$.

Exercice N°6 :

1. Démontrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
2. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{n+1}}\notin\mathbb{Q}$.
3. Soient a et b deux nombres rationnels.
   a. Montrer que $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$.
   b. En déduire que, $\forall(a,b,a',b')\in\mathbb{Q}^4$ on a : $\left(a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(a=a'\wedge b=b'\right)$.

Exercice N°7 :

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}),\exists(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^{*2}:\begin{cases}\left(2+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}\\ a_n^2-1=3b_n^2\end{cases}.$$

Exercice N°8 :

Montrer que :

1- $\forall x\in\mathbb{R}^+, \frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$.

2- $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: xy\neq1\wedge x\neq y\right)\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}\right)$.

3- $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, x+\frac{1}{x}\geq2$

Exercice N°9 :

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1- $\left(|a|<1\wedge|b|<1\right)\Rightarrow\left(|a+b|<|1+ab|\right)$.

2- $(a\neq1\, et\, b\neq1)\Rightarrow(a+b-ab\neq1)$

Exercice N°10 :

Démontrer que :

1- $(\forall n\in\mathbb{N}), \frac{1+n^{2017}+(n+1)^{2018}}{2}\in\mathbb{N}$

2- $(\forall n\in\mathbb{N}), \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\in\mathbb{N}$.

Exercice N°11 :

Montrer que :

1- $\forall y\in[-1,1[;\exists! x\in IR^+: \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=y$.

2- $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{b+1}-\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow(b<a)$

3- $\forall x\in\mathbb{R}, x+\sqrt{1+x^2}>0$

Exercice N°12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1- $\sqrt{x^2-3x+2}>x-2$

2- $\sqrt{2x^2+1}>2x-4$

3- $|x|+|x+1|+|x-2|=5$