

التمرين رقم 01:

$(E, +, \cdot)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R} .

تكن $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ و $x \in \mathbb{R}^+$ ، نضع : $f_{(a,b)}(x) = x^a e^{bx}$ و $\varphi_{(a,b)}(x) = \ln[f_{(a,b)}(x)]$

و نعتبر المجموعة : $F = \{\varphi_{(a,b)} \in E / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1- بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(E, +, \cdot)$.

2- بين أن $(\varphi_{(1,0)}; \varphi_{(0,1)})$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(F, +, \cdot)$ ، ثم استنتج $\dim(F)$.

التمرين رقم 02:

في الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفة المربعة : $A = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ حيث q عدد حقيقي معلوم.

و لتكن المجموعة الجزئية : $E = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / MA = AM\}$

1- أ- بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة.

ب- بين أن : $A^2 + q.I = \theta$ ، حيث θ هي المصفوفة المنعدمة و I المصفوفة الوحيدة.

ج- استنتج أنه إذا كان $q \in \mathbb{R}^-$ فإن الحلقة $(E, +, \times)$ غير كاملة.

2- نفترض في هذا السؤال أن $q \in \mathbb{R}^+$ ، و نضع : $\omega = i\sqrt{q}$.

أ- بين أن : $E = \left\{ M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} x & -qy \\ y & x \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

ب- بين أن الأسرة $B(1, \omega)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

ج- نعتبر التطبيق المعرف من \mathbb{C} نحو E بما يلي : $\varphi(z) = \varphi(x + \omega y) = M_{(x,y)}$

⇔ بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) .

د- استنتج بنية (E^*, \times) ، ثم بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

3- أثبت أن الحلقة $(E, +, \times)$ تكون جسما إذا و فقط إذا كان : $q \in \mathbb{R}^+$.

التمرين رقم 03:

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $a \wedge 10 = 1$.

(1)- بين أن : $a^4 \equiv 1[2]$ و $a^4 \equiv 1[5]$ ، ثم استنتج أن : $a^4 \equiv 1[10]$.

(2)- بين بالترجع أن لكل $k \in \mathbb{N}$: $a^{4 \times 10^k} \equiv 1[10^{k+1}]$ (لاحظ أن : $x^{10} - 1 = (x-1) \sum_{p=0}^9 x^p$) .

(3)- استنتج أنه لكل $k \in \mathbb{N}$: $a^{8 \times 10^k + 1} \equiv a[10^{k+1}]$.

(4)- حدد عددا صحيحا طبيعيا N بحيث كتابة N^3 في نظمة العد العشري تنتهي ب 123456789 .

التمرين رقم 04:

ليكن α و β عددين عقديين معلومين و $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

و مهما يكن z من \mathbb{C} ، نضع : $f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$.

(1)- أ- بين أن : $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$.

ب- استنتج أن : $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

ج- بين أن : $|f(1)|$ أو $|f(j)|$ أو $|f(j^2)|$ أكبر من أو يساوي 1 .

(2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر مثلثا ABC مباشر و متساوي الأضلاع مركزه O بحيث لخط النقطة A عددا حقيقي r موجب

قطعا و تتكن I و J نقطتين من (P) لخطاهما على التوالي a و b .

و نأخذ فيما يلي : $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ و $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

أ- بين أن لخطي النقطتين B و C هما على التوالي : rj و rj^2 .

ب- بين أن : $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3 |f(j)|$ ، ثم أحسب $CO \cdot CI \cdot CJ$ و $AO \cdot AI \cdot AJ$.

ج- بين أن المثلث ABC يقبل على الأقل رأسا S بحيث : $SO \cdot SI \cdot SJ \geq r^3$.

1- أ- ضع جدول تغيرات f .
 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ بما يلي: $f(x) = -\ln(1 + \sin x)$.

ب- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده.

ج- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على J ، ثم أحسب $(f^{-1})'(x)$ لكل $x \in J$.

2- لتكن φ الدالة المعرفة على المجال $] -\ln 2; +\infty[$ بما يلي: $\varphi(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

أ- ضع جدول تغيرات φ ، ثم أرسم المنحنى (C_φ) في معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (Ox) و (C_φ) والمستقيمين: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و تكن $x \in [0; +\infty[$ ، نضع: $G_n(x) = \int_0^x [\varphi(t)]^n dt$.

1- أ- أحسب $G_1(x)$ بدلالة $f^{-1}(x)$ ، ثم استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$.

ب- تكن $t \in] -\ln 2; +\infty[$ ، نضع: $h(t) = \ln(2 - e^{-t})$ ، بين أن: $h'(t) = [\varphi(t)]^2$.

ج- أحسب $G_2(x)$ تكن $x \in [0; +\infty[$ ، ثم استنتج: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_2(x)$.

2- أ- أثبت أن: $(\forall t \in [0; +\infty[); -e^{-\frac{t}{2}} \leq \varphi(t) \leq 0$.

ب- ليكن $x \in [0; +\infty[$ ، بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |G_n(x)| \leq \frac{2}{n}$.

ج- استنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$ تكن $x \in [0; +\infty[$.

3- أ- بين أن: $(\forall t \in [0; +\infty[); \varphi(t) + [\varphi(t)]^3 = -2\varphi'(t)$.

ب- استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in [0; +\infty[$: $G_n(x) + G_{n+2}(x) = \frac{-2}{n} ([\varphi(t)]^n - (-1)^n)$.

4- نكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = G_n \left(\ln \frac{5}{2} \right)$ و $v_n = \frac{2 \times (-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)$ و $w_n = (-1)^n \times u_{2n}$

أ- أحسب u_2 ، ثم تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+2} + u_n = v_n$

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = (-1)^{n+1} \times v_{2n} + w_n$

5- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{32} + \dots + \frac{(-1)^n \times (1 - 4^n)}{n \cdot 4^n} \right)$

إنتهى الموضوع .