Partie 1 :

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln x - \frac{x^2-1}{2x}$

1) Montrer que : $\forall x \in IR^+ \quad : \quad 0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}$
2) A) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

   B) Etudier le sens de variations de g puis déduire le signe de g(x) (remarquer que g(1)=0)

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur IR^{+*} par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{2(x-1)} \ln x & ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ puis étudier les deux branches infinies de (Cf).
2) Montrer que f est continue en 1.
3) A) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}}{x^2}=0$ puis étudier la dérivabilité de f à droite de 1.

   B) Montrer que : $\forall x \in IR^{+*}\{1\}$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{x} \times \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}-1}$, puis déduire que f est dérivable en 1.
4) Montrer que : $\forall x \in IR^{+*}\{1\}$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^2}$, puis dresser les tableau de variations de f.
5) Construire la courbe (Cf).

Partie 3 :

On admet que l'équation $x^2 - \ln(x+1) = 0$ a une unique solution non nulle : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Montrer que $\forall x \in]0; \alpha[\;:\; x^2 + x - \ln(x+1) < x$
2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n - \ln(u_n+1) \end{cases}$

   A) Montrer que : $\forall n \in IN \quad : \quad 0 < u_n < \alpha$

   B) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis donner sa limite .

Partie 4 : (Facultative)

Pour $n \in IN$ et $n \geq 2$

1) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $0 < v_n < 1$
2) Montrer que (v_n) est décroissante puis déduire qu'elle est convergente.
3) Montrer que : $\forall n \geq 2 \quad v_n < \frac{1}{e^n}$ puis déduire sa limite .