الثانوية التأهيلية وادي الذهب تيفلت 2010/2011	تصحيح الفرض رقم 2 الدورة الأولى	المستوى : 2ف.ك4 2ع.ح.4ا

التمرين الأول: (4 ن)

1) (1 ن)

$$f(x) = 2x\sqrt{x^2+1} = (x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \alpha$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}^{\,3} + \alpha$$

2) (1ن)

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{-3}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{-2}(x^2+1)^{-2} + \alpha = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2} + \alpha$$

3) (1ن)

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-8}} = \frac{(x^2+2x-8)'}{2\sqrt{x^2+2x-8}}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+2x-8} + \alpha$$

4) (1ن)

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)} = \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^3(x).tan'(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{4}tan^4(x) + \alpha$$

التمرين الثاني: (4 ن)

1) (2ن)

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{3-x}\,;\, 1 \le x \le 3 \\ f(x) = x - \sqrt{x-2} \quad ;\, 3 < x \le 5 \end{cases}$$

لنبين أن f متصلة على I=[1,5]

- f متصلة على [1,3] لأنها مجموع دالة حدودية (متصلة) ومركب دالة حدودية (متصلة) ودالة الجدر المربع (متصلة) .

- f متصلة على]3,5] لأنها مجموع دالة حدودية (متصلة) ومركب دالة حدودية (متصلة) ودالة الجدر المربع (متصلة) .

$f(3)=3-1+\sqrt{0}=2$ أي $f(3)=2$

$$\lim_{3^+} f(x) = \lim_{3^+}\left(x-\sqrt{x-2}\right) = 3-1 = 2 = f(3)$$

إذن f متصلة على يمين 3.

ومنه f متصلة على [1,5] وبالتالي فهي تقبل دوال أصلية على I

2) (2ن)

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{2}{3}\sqrt{3-x}^3 + \alpha \,;\, 1 \le x \le 3 \\ g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x-2}^3 + \beta \quad ;\, 3 < x \le 5 \end{cases}$$

- على [1,3] $\quad g'(x) = x - 1 + \sqrt{3-x} = f(x)$
- على]3,5] $\quad g'(x) = x - \sqrt{x-2} = f(x)$

إذن لكي تكون g دالة أصلية لـf على I يجب أن تكون g قابلة الاشتقاق غلى I إذن متصلة على إذن متصلة في 3 أي $\lim_{3^+} g(x) = \lim_{3^-} g(x)$

$$\alpha + \frac{9}{2} - 3 - \frac{2}{3}\sqrt{3-3}^3 = \frac{9}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3-2}^3 + \beta$$

$$\alpha - 3 = -\frac{2}{3} + \beta$$

$$\beta = \alpha - \frac{7}{3}$$

التمرين الثالث : (12 ن)

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

1)أ) تحديد D_f :(0.75ن)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 2x \ge 0 \Leftrightarrow x(x+2) \ge 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$$

إذن $D_f =]-\infty, -2] \cup [0,+\infty[$

ب) حساب $\lim_{-\infty} f(x)$ والتأويل: (1.25ن)

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right) = \lim_{-\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{-\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -1$$

إذن $\lim_{-\infty}(x) = -1$

ومنه C_f يقبل مقارب موازي لمحور الأفاصيل بجوار ∞- معادلته $y=-1$.

2)أ) اشتقاق f على يمين 0 والتأويل: (1.25ن)

$$\lim_{0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim_{0^+}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x}\right) = \lim_{0^+}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right) = +\infty$$

إذن f غير ق.إ على يمين 0

ومنه C_f يقبل نصف مماس على يمين النقطة التي أفصولها 0 موجه نحو الأعلى معادلته $x=0$

ب) اشتقاق f على يسار 2- والتأويل:(1.25ن)

$$\lim_{-2^-}\left(\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{-2^-}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+2x}+2}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{-2^-}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}\right) = \lim_{-2^-}\left(1-\sqrt{\frac{x(x+2)}{(x+2)^2}}\right) = \lim_{-2^-}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
$$= -\infty$$

إذن f غير ق.ا على يسار 2-

ومنه C_f يقبل نصف مماس على يسار النقطة التي أفصولها 2- موجه نحو الأعلى معادلته $x=-2$

ج)لدينا:(2ن) $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x) = 1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

- على المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)>0$ إذن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

- على المجال]-∞,-2[:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)}<0$$

إذن f تناقصية قطعا على]-∞,-2[

جدول التغيرات :

X	-∞ +∞	-2	0
f'(x)	- -∞		+∞ +
f(x)	-1 ↘ -2		0 ↗ +∞

$$\lim_{+\infty} f(x)=\lim_{+\infty} x+\sqrt{x^2+2x}=+\infty$$

3) (1.5ن) $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$

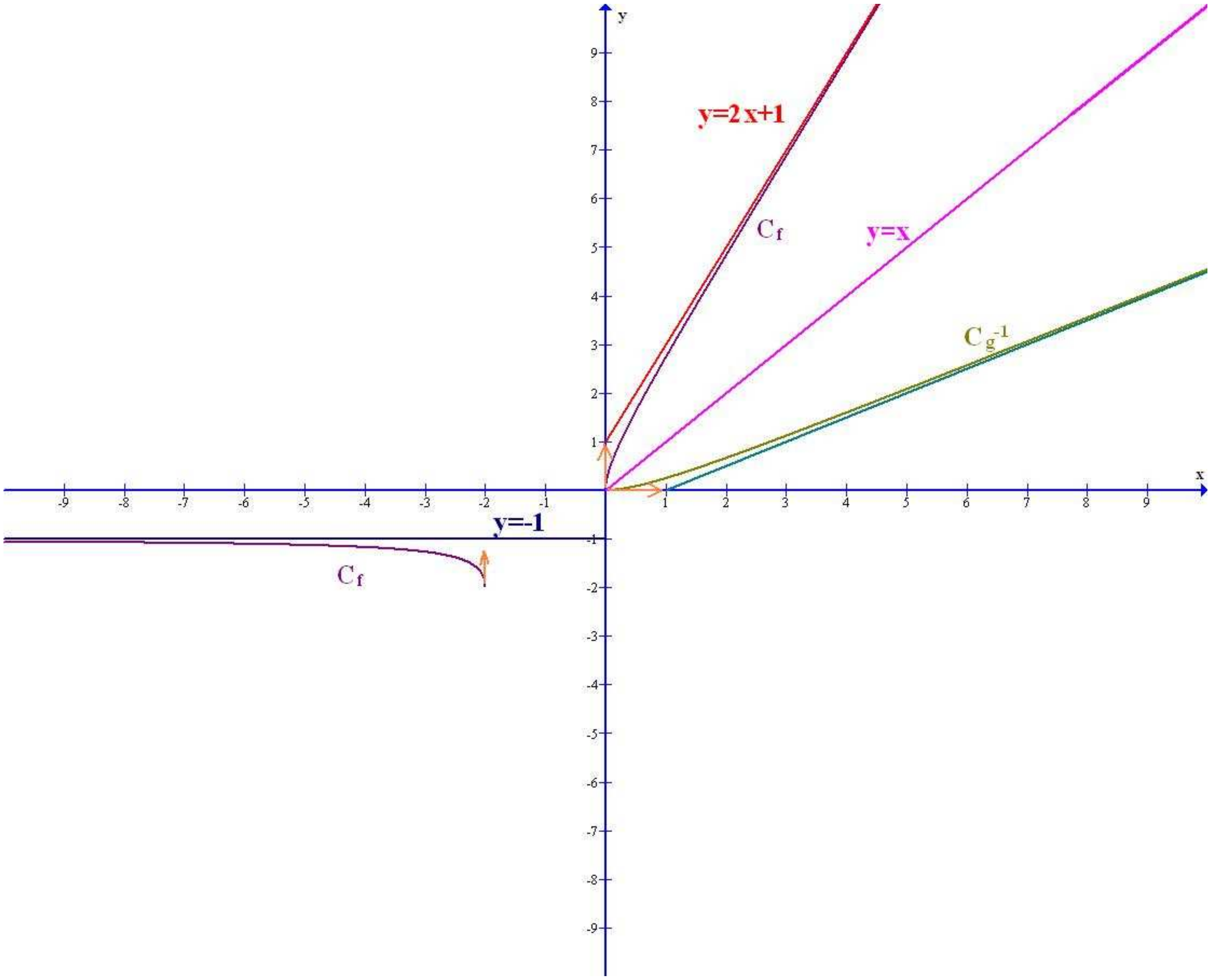
$$\lim_{+\infty}(f(x)-(2x+1))$$
$$=\lim_{+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}-2x-1\right)$$
$$=\lim_{+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)=\lim_{+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}=0$$

إذن C_f يقبل مقارب مائل بجوار +∞ معادلته y=2x+1

الوضع النسبي : $f(x)-y=\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}<0$

إذن C_f تحت المقارب المائل بجوار +∞

4)منحنى C_f (1.5ن)



5)أ) $g=f_{[0,+\infty[}$ (1.5ن)

+ g متصلة على $[0,+\infty[$ لأنها مجموع دالة حدودية (متصلة) ومركب دالة حدودية (متصلة) و دالة الجدر المربع .

+ g تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال :

$$J = g(I) = [g(0); \lim_{+\infty} g(x)[= \boxed{[0;+\infty[}$$

+ الدالة العكسية :

$$g(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+2x} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} = y - x \Leftrightarrow x^2 + 2x$$

$$= y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{y^2}{2(1+y)}}$$

إذن $\forall x \in J \, , g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2(1+x)}$