ثانوية ابن بطوطة التأهيلية | 📖 سلسلة رقم ٥ | السنة الدراسية : ٢٠١٤/٢٠١٥

المستوى: ١باك ع ت ٢ و ٤ | الأستاذ: محمد لغزال

المتتاليات العددية

التمرين ١

1- نعتبرمتتالية هندسية (U_n) أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $U_0=2$

ا- احسب U_1, U_2 وU_3 ثم عبر عن U_n بدلالة n

ب- استنتج المجموع $S_n=U_0+......+U_n$

2- نعتبر المتتالية (V_n) بحيث $V_n=U_n{}^2 \quad \forall n\in IN$

ا- بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددا حدها الأول و أساسها

ب- استنتج تعبير V_n بدلالة n .

التمرين ٢

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بحيث $U_0=1$ و $U_{n+1}=2U_n+1 \quad \forall n\in IN^*$

و المتتالية (V_n) بحيث $V_n=U_n+1 \quad \forall n\in IN$

1- ا- بين أن المتتالية (V_n) هندسية

ب- استنتج تعبير V_n ثم U_n بدلالة n

2- استنتج قيمة المجاميع $S_n=V_0+.....+V_n$ و $S_n'=U_0+......+U_n$

التمرين ٣

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث $U_{n+1}=2^{3n+2} \quad \forall n\in IN$

1- احسب U_1, U_2 و U_3 ثم U_n بدلالة n

2- تحقق أن $U_{n+1}-8U_n=0 \quad \forall n\in IN$

التمرين ٤

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بحيث

$$U_0=2 \text{ و } U_{n+1}=\frac{3U_n}{5}+\frac{2}{5} \quad \forall n\in IN$$

نعتبر $V_n=U_{n+1}-U_n \quad \forall n\in IN$

1- بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددا أساسها و حدها الأول

2- حدد V_n ثم U_n بدلالة n

3- استنتج قيمة المجموع $S_n=V_0+...+V_n$

التمرين ٥

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بمايلي:

$$U_0=0 \text{ و } U_{n+1}=\frac{U_n-1}{U_n+3} \quad \forall n\in IN$$

1- بين أن $U_n\neq -1 \quad \forall n\in IN$

2- نعتبر المتتالية $V_n=\frac{1}{U_n+1} \quad \forall n\in IN$

ا- بين أن (V_n) متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول

ب- حدد V_n ثم U_n بدلالة n

التمرين ٦

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بمايلي:

$$U_0=3 \text{ و } U_{n+1}=3-\frac{2}{U_n} \quad \forall n\in IN$$

1- بين أن $U_n\neq 2 \quad \forall n\in IN$

2- نعتبر المتتالية $V_n=\frac{U_n-1}{U_n-2} \quad \forall n\in IN$

ا- بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

ب- حدد V_n ثم U_n بدلالة n

التمرين ٧

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة ب:

$$U_0=0 \text{ و } U_{n+1}=\frac{5U_n+4}{U_n+2} \quad \forall n\in IN$$

و نعتبر المتتالية $V_n=\frac{U_n-4}{U_n+1} \quad \forall n\in IN$

1- بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ و حدها الأول $v_0=-4$

ب- حدد V_n بدلالة n ثم استنتج أن $\forall n\in IN$

$$U_n=\frac{4(1-(\frac{1}{6})^n)}{1+4(\frac{1}{6})^n}$$

التمرين ٨

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة ب:

$U_0=1$ و $U_{n+1}=(U_n+1)\sqrt{U_n}$ $\quad \forall n\in IN$

1- احسب U_1 و U_2

2- بين بالترجع أن $U_n\geq 1$ $\quad \forall n\in IN$

3- ا- تحقق أن $U_{n+1}\geq 1+U_n$ $\quad \forall n\in IN$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

التمرين ٩

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بحيث $U_0=2$ و

$$U_{n+1}=\frac{5U_n-1}{3+U_n} \quad \forall n\in IN$$

و نعتبر المتتالية $V_n=\frac{1}{U_n-1}$ $\quad \forall n\in IN$

1- احسب U_1 و V_0

2- بين بالترجع أن $U_n\geq 1$ $\quad \forall n\in IN$

3- بين أن المتتالية (V_n) حسابية محددا أساسها و حدها الأول

4- حدد V_n ثم U_n بدلالة n

التمرين ١٠

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بحيث $U_0=3$ و

$$U_{n+1}=2+\frac{1}{U_n}-\frac{2}{U_n^2} \quad \forall n\in IN$$

1- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ مصغورة بالعدد 2

2- ا- بين أن $0\leq U_{n+1}-2\leq \frac{1}{4}(U_n-2)$ $\quad \forall n\in IN$

ب- استنتج أن $0\leq U_n-2\leq (\frac{1}{4})^n$

التمرين ١١

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بمايلي:

$U_0=\frac{1}{2}$ و $U_{n+1}=U_n\sqrt{U_n}$ $\quad \forall n\in IN$

1- بين بالترجع أن $0\leq U_n\leq \frac{1}{2}$ $\quad \forall n\in IN$

2- ادرس رتابة $(U_n)_n$ ثم برهن أن

$$U_n\leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \quad \forall n\in IN$$

التمرين ١٢

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ بحيث $0\leq U_0\leq 1$ و

$$U_{n+1}=\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \quad \forall n\in IN$$

1- بين باستعمال الترجع أن $0\leq U_n\leq 1$ $\quad \forall n\in IN$

2- بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية ثم استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة

3- نضع $U_0=\cos\theta$ حيث $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, بين بالترجع

أن $U_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$ $\quad \forall n\in IN$

نبذة تاريخية

ولد كارل فريديريك غوص في مدينة برونشفايغ عام 1777 م وتوفى عام 1855 م.

عاش بمدينة غوتنغن حيث التحق بجامعتها ليصبح سنة 1807م أستاذاً ومديراً لمرصدها.

كان غوص معروفاً لأبحاثه المتميزة في حقول الرياضيات والفيزياء وعلم الفلك وعلم قياسات الأرض وعلم فيزياء الأرض، ومازال يعود له الفضل الكبير في عدد من المجالات العلمية في وقتنا الحاضر.

كان غوص عبقريا منذ صغره فقد تعلم بمفرده القراءة و العد و عمره ثلاث سنوات كمأنه أبهر مبكرا أساتذته و يحكى أن أحد الأساتذة، بهدف الاستراحة، كلف تلامذته الذين كان من بينهم غوص و عمره ثمان سنوات، القيام ببعض العمليات الحسابية فاقترح عليهم حساب مجموع الأعداد من 1 إلى 100 إلا أنه بعد لحظات قليلة قدم له غوص الحل الصحيح.

كتب غوص المجموع المطلوب مرتين وذلك بإتباع ترتيبين متعاكسين
$$\begin{cases}1+2+.........+99+100\\100+99+.........+2+1\end{cases}$$

لاحظ بعد ذلك أنه بتجميع كل عددين عموديا يحصل على نفس المجموع 101 بحيث أن:

$1+100=101$ ، $2+99=101$ ، $3+98=101$ ، ...

$100+1=101$ و هذا مائة مرة.

توصل هكذا إلى أن $2(1+2+...+100)=100\times 101$

و منه $1+2+...+100=\frac{100\times 101}{2}=5050$.