تمرين1

في $M_3(IR)$ نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ونضع $G=\{I,\ J,\ A,\ B\}$ حيث $J=-I$ و $B=-A$ و I هي المصفوفة الوحدة .

1. تأكد أن G جزء مستقر في $(M_3(IR),\times)$.
2. بين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية.
3. لتكن المجموعة
$$E=\{M(a,b)=a.I+b.A/\ (a,b)\in IR^2\}$$
بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وغير كاملة
4. نضع $D=I+A$. حدد D^n لكل n من $\mathbb{N}$ خذ $D^0=I$

تمرين2

جزء أول : لتكن U مجموعة عناصر $M_3(IR)$ التي تقبل مقلوبات بالنسبة للضرب

1. بين أن U جزء مستقر من $(M_3(IR),\times)$
2. بين أن $(U,\times)$ زمرة
3. لكل A من U نعتبر التطبيق :
$$\varphi_A : U\to U$$
$$M\mapsto AMA^{-1}$$
بين أن φ_A تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(U,\times)$

جزء ثاني :

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ والمجموعة E المعرفة بما يلي

$E=\{M\in M_3(IR)/\ M\times A=A\times M\}$.

1. ا. اذكر عنصرين من E
ب. بين أن E جزء مستقر من $(M_3(IR),\times)$
ج اذكر خاصيات $(E,\times)$ ثم بين أنها ليست زمرة
2. ا. بين أن $\forall n\in IN\quad A^n\in E$ (ليس مطلوبا حساب A^n)
ب. احسب A^n لكل عدد صحيح طبيعي
ج. استنتج أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في $(M_3(IR),\times)$ وحدده

تمرين3

نعتبر المجموعة A المعرفة بما يلي $A=\{n+m\sqrt{10}\ /\ (n,m)\in Z^2\}$

1. ا. بين أن A جزء مستقر من $(IR,+)$ و $(IR,\times)$
ب. بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .
2. نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي:
$$f:\ A\ \to\ IN$$
$$n+m\sqrt{10}\mapsto\left|n^2-10m^2\right|$$
أ. بين أن f تشاكل من $(A,\times)$ نحو $(IN,\times)$
ب. نعتبر المجموعة B المعرفة بما يلي
$$B=\{a\in A\ /\ f(a)=1\}$$
بين أن B جزء مستقر من $(A,\times)$ وان $(B,\times)$ زمرة تبادلية
ج. برهن أن $B=U$ حيث U هي مجموعة عناصر A التي تقبل مقلوبات في A .
3. ا . بين أن $\forall\ \bar{x}\in Z/5Z\quad \bar{x}^2\notin\{\bar{2},\bar{3}\}$
ب . استنتج أن المعادلة $\left|n^2-10m^2\right|=2$ ليس لها حل في Z^2
ج . هل التشاكل f شمولي
د . ليكن a و b عنصرين من A حيث $ab=2$
بين أن $a\in B$ أو $b\in B$

تمرين4

لكل عددين حقيقيين a و b نعتبر المصفوفة $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$

ولتكن E المجموعة المعرفة ب $E=\{M(a,b)/\ (a,b)\in IR^2\}$

نزود هده المجموعة بالقانونين + و $\times$

1. تأكد أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),+)$ و $(M_2(IR),\times)$
2. بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية
3. نعتبر التطبيق :
$$f:\ C\ \to\ E$$
$$a+ib\mapsto M(a,b)$$
أ. بين أن f تشاكل تقابلي من $(C,+)$ نحو $(E,+)$ ومن $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$
ب. استنتج بنية $(E,+,\times)$
استنتج أيضا أن : $\forall M\in E^*\ \exists!(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi]:$
$$M=\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$
حيث $E^*=E-\{M(0,0)\}$
4. ا. بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي
نضع $M(0,1)=J$
تأكد أن $J^2=-I$ ثم حدد J^{-1} مقلوب المصفوفة J
5. ا. ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا غير منعدم (a و b عددان حقيقيان)
بين أن $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\ \dfrac{b}{a^2+b^2}$
ب . باستعمال ا. والتشاكل السابق حدد مقلوب $M(a,b)$ عند وجوده
6. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا حيث $n\geq 2$ نسمي جذرا نونيا للوحدة في E كل مصفوفة M من E تحقق $M^n=I$ حيث I هي المصفوفة الوحدة . ولتكن F_n مجموعة الجذور النونية للوحدة في E .

أ. هل $\Theta\in F_n$ (Θ هي المصفوفة المنعدمة)

ب. برهن أن $(F_n,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E^*,\times)$

ت. بين أن $\forall(A,B)\in E^2\ (AB\in F_n \Rightarrow BA\in F_n)$

7. ا. حدد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد 1 في $\mathbb{C}$

ب . باستعمال ا. والتشاكل السابق حدد F_4

ج . بين أن مجموع عناصر F_4 يساوي Θ

8. نعتبر المجموعة $F=\{M(a,b)\in E : a^2+b^2=1\}$

أ. بين أن $\forall n\ge 2\quad F_n\subset F$

ب. بين بطريقتين مختلفتين أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية

تمرين5 :

1. نعتبر المجموعة $E=\left\{\frac{m}{10^n} : (m,n)\in Z\times IN\right\}$

أ. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وكاملة.

ب. بين أن $(E,+,\times)$ ليست جسما .

2. ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث $b\ge 2$.

نعتبر المجموعة $F=\left\{\frac{m}{b^n} : (m,n)\in Z\times IN\right\}$

أ. بين أن $(F,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وكاملة.

ب. بين أن $(F,+,\times)$ ليست جسما (يمكن استعمال التفكيك الأولي للعدد b)

تمرين6 :

جزء أول: لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة وحدتها **1** وصفرها 0 و $a\in A$ و $b\in A$ حيث $a\cdot b=b\cdot a$.

1. برهن آن $\forall n\in IN\quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

2. العنصر a متقدم من الرتبة n يعني أن $a^n=0$

أ. برهن انه إذا كان a متقدما فان $1-a$ يقبل مقلوبا وحدد هذا المقلوب.

ب. ليكن x عنصرا متقدما من A . بين أن :

$$\forall n\in IN\quad \prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=(1-x)^{-1}\left(1+x^{2^{n+1}}\right)$$

جزء ثاني : في الحلقة $(M_3(IR),+,\times)$ نعتبر المصفوفات

$$M=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ و } N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ و}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ و } A=\begin{pmatrix}1&-a&0\\0&1&-a\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ و } (a\in IR)$$

1. ا. اذكر علاقة بسيطة بين M و N و D

ب . تأكد أن $DN=ND$

2. ا. احسب N^2 و N^3

ب . استنتج N^k حيث $k\in IN$ حيث $N^0=I$ و $N^k=NN^{k-1}$

ج . احسب M^{2011}

3. بين أن $I-N$ تقبل مقلوبا وحدده

4. بين أن A تقبل مقلوبا وحدده

جزء ثالث: في $(Z/8Z,+,\times)$ بين أن يقبل مقلوبا وحدده

تمرين7 :

جزء 1 نعتبر مجموعة $(A,*,T)$ حلقة واحدية عنصرها المحايد e ووحدتها ε ولتكن U مجموعة عناصر E التي تقبل مماثلات بالقانون T.

1. ا. تأكد أن U غير فارغة .

أ. بين أن U جزء مستقر بالقانون T.

2. ا. لتكن $a\in A$. بين أن العبارات التالية متكافئة

$(P): a\in U$ و (Q): تقابل $\begin{array}{l}\delta_a : E\to E\\ x\mapsto xTa\end{array}$ و

(R): تقابل $\begin{array}{l}\gamma_a : E\to E\\ x\mapsto aTx\end{array}$

ب . استنتج انه إذا كان γ_a تقابلا فان a ليس قاسما للصفر

ج . حدد γ_e و γ_ε

د. ليكن $a\in U$ و $b\in U$ حدد $\gamma_a\circ\gamma_b$ واستنتج γ_a^{-1}.

3.ا. بين أنه إذا كان $a\in U$ فان a منتظم بالنسبة ل T .

ب. هل العكس صحيح .

جزء 2

نضع $L(A)=\{\gamma_a / a\in A\}$ ونزودها بالقانون $+$ المعرف بما يلي

$$\forall(a,b,x)\in A^3\ (\gamma_a+\gamma_b)(x)=\gamma_a(x)*\gamma_b(x)$$

5. اثبت ان $(L(A),+)$ زمرة تبادليةعنصرها المحايد γ_e

6. نعتبر التطبيق $\begin{array}{l}f : A\to L(A)\\ a\mapsto \gamma_a\end{array}$

اثبت أن f تشاكل تقابلي من (A,T) نحو $(L(A),\circ)$ حيث هو قانون تركيب التطبيقات

7. برهن انه إذا كان $(A,*,T)$ جسما فان $(L(A),+,\circ)$ جسم

تمرين8 : جزء أول : نضع $I=\{-1,1\}$ ونزودها ب $\times$ ضرب عددين . حدد بنية $(I,\times)$

جزء ثاني : ليكن p عددا أوليا موجبا نعتبر المجموعة A المعرفة بما يلي : $A=\{n+m\sqrt{p} \ / \ (n,m)\in Z^2\}$

1. ا. تأكد أن A جزء مستقر من $(IR,+)$ ومن $(IR,\times)$

ب. بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

2. بين أن $(A,+,\times)$ كاملة وأنها ليست جسما

3. **نعتبر التطبيق**

$$f: A \to Z$$
$$x = n+m\sqrt{p} \mapsto n^2 - pm^2$$

أ. **بين أن** f **تشاكل من** $(A,\times)$ **نحو** $(Z,\times)$

ب. **برهن أن :** $\forall x\in A \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ت. **لتكن** U **مجموعة عناصر** A **التي تقبل مقلوبات في** $(A,\times)$

اذكر دون تعليل بنية $(U,\times)$ **وبرهن أن :**

$$\forall x\in A \quad x\in U \Leftrightarrow f(x)\in I$$

جزء ثالث : لكل عددين صحيحين نسبيين n **و** m **نضع** $M(n,m) = \begin{pmatrix} n & m\sqrt{p}\\ m\sqrt{p} & n\end{pmatrix}$ **ولنعتبر المجموعة** E **المعرفة ب**

$E=\{M(n,m)/(n,m)\in Z^2\}$ **والتطبيق** g **المعرف بما يلي**

$$g: A\to E$$
$$x = n+m\sqrt{p} \to M(n,m)$$

1. **برهن أن** g **تشاكل تقابلي من** $(A,+)$ **نحو** $(E,+)$ **ومن** $(A,\times)$ **نحو** $(E,\times)$
2. **استنتج بنية** $(E,+,\times)$
3. **لتكن** V **مجموعة عناصر** E **التي تقبل مقلوبات في** $(E,\times)$

أ. **بين أن** $g(U)=V$

ب. **ليكن** $M(n,m)=M$ **عنصرا من** E **برهن أن**

$$M\in V \Leftrightarrow n^2-pm^2\in I$$

وحدد M^{-1} **في هذه الحالة**

تمرين9 : جزء أول

ليكن f **تقابلا من مجال** I **نحو مجال** J **مزود بقانون داخلي** T **و** f^{-1} **تقابله العكسي . نزود** I **بالقانون الداخلي** $*$ **المعرف ب**

$$\forall(a,b)\in I^2: a*b = f^{-1}(f(a)\,T\,f(b))$$

1. ادرس خاصيات القانون $*$ بدلالة خاصيات القانون T
2. أثبت أنه إذا كان القانون T يقبل عنصرا محايدا ε في J فان $*$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده .
3. حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(I,*)$ بدلالة العناصر القابلة للمماثلة في (J,T)
4.

أ. اثبت أن f تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو (J,T)

ب. ليكن a من I و n من IN^*

احسب $\underbrace{a*a*...*a}_{n\ termes}$ بدلالة $f(a)$

جزء ثاني

نعتبر المجال $I=[1,+\infty[$ **ونزوده بالقانون الداخلي** $*$ **المعرف ب**

$$\forall(a,b)\in I^2: a*b=\sqrt[3]{a^3+b^3-1}$$

1. حدد التطبيق المستعمل والمجال J والقانون T في هذا المثال
2. ادرس تبادلية و تجميعية القانون $*$ في I .
3. أثبت أن القانون$*$ يقبل عنصرا محايدا في I وحدده.
4. حدد العناصر القابلة للمماثلة في $(I,*)$
5. نعتبر التطبيق

$$f: I\to IR^+$$
$$x\mapsto x^3-1$$

أ. اثبت أن f تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(IR_+,+)$.

ب. ليكن a من I و n من IN^*

احسب $\underbrace{a*a*...*a}_{n\ termes}$

جزء ثالث : اجب عن نفس الأسئلة مع مثالين من اختيارك من التقابلات التي درستها هذه السنة في محور التحليل

جزءرابع : A) ع (2011)ليكن a **عددا حقيقيا وليكن المجال** $I=]a,+\infty[$ **نعتبر التطبيق**

$$f: I\to IR^{*+}$$
$$x\mapsto \frac{1}{x-a}$$

1. **بين أن** f **تقابل من المجال** I **نحو** IR^{*+} **وحدد تقابله العكسي** f^{-1}
2. **بين ان** $\forall(x,y)\in I^2 \quad x*y = f^{-1}(f(x)\times f(y))$

$$= (x-a)(y-a)+a$$

حيث $*$ **هو القانون الداخلي المعرف على** I **كما في الجزء الأول**

3. **مستعملا الجزء الأول بين أن** $(I,*)$ **زمرة تبادلية وان** f **تشاكل تقابلي من** $(I,*)$ **نحو** $(IR^{*+},\times)$
4. **حل في المجموعة المعادلة** $x^{(3)}=a^3+a$ **حيث**

$$x^{(3)}=x*x*x$$

B) ا (2011)نعتبر $I=]0,1[$ **والتطبيق**

$$f: I\to IR^{*+}$$
$$x\mapsto \frac{1}{x}-1$$

4. **بين أن** f **تقابل من المجال** I **نحو** IR^{*+} **وحدد تقابله العكسي** f^{-1}

$$\forall(x,y)\in I^2 \quad x*y = f^{-1}(f(x)\times f(y))$$

5. **بين أن**

$$= \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$$

حيث $*$ **هو القانون الداخلي المعرف على** I **كما في الجزء الأول**

6. **مستعملا الجزء الأول بين أن** $(I,*)$ **زمرة تبادلية وان** f **تشاكل تقابلي من** $(I,*)$ **نحو** $(IR^{*+},\times)$

C) ع (2010) نعتبر $I=]0,+\infty[$ **والتطبيق**

$$f: I\to IR$$
$$x\mapsto \ln(x)$$

1. **بين أن f تقابل من المجال I نحو IR وحدد تقابله العكسي** f^{-1}
2. **بين أن**
$$\forall (x,y)\in I^2 \quad x*y = f^{-1}\left(f(x)+f(y)\right) = e^{\ln(x).\ln(y)}$$

حيث $*$ هو القانون الداخلي المعرف على I كما في الجزء الأول

3. **مستعملا الجزء الأول بين أن $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ زمرة تبادلية وان f تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(IR,+)$**
4. **بين ان $(I,\times,*)$ جسم تبادلي**

D) ا (2010) **نعتبر**
$$I=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}/\,x\in\mathbb{R}\right\}$$
والتطبيق
$$f: I\to IR,\quad M(x)\mapsto x$$

1. **بين أن f تقابل من المجال I نحو IR وحدد تقابله العكسي** f^{-1}
2. **بين أنه لكل x و y من** IR
$$M(x)\times M(y)=f^{-1}\left(f(x)+f(y)\right)$$
3. **مستعملا الجزء الأول بين أن $(I,\times)$ زمرة تبادلية واذكرخاصية أخرى ل f**
4. **حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ لكل x من** IR
5. **بين أن $f^{-1}\circ\ln\left(IR^{*+}\right)$ زمرة جزئية من $(I,\times)$**

E) ع **(2007)نعتبر $I=IR\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ والتطبيق**
$$f: I\to IR^*,\quad x\mapsto 1-\sqrt{2}\,x$$

1. **بين أن f تقابل من I نحو IR^* وحدد تقابله العكسي** f^{-1}
2. **بين أن**
$$\forall (x,y)\in I^2 \quad x*y=f^{-1}\left(f(x)\times f(y)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(y\sqrt{2}-1\right)$$

حيث $*$ هو القانون الداخلي المعرف على I كما في الجزء الأول

3. **مستعملا الجزء الأول بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية واذكرخاصية أخرى ل f**

4. لكل a من IR نضع
$$M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$$
وليكن $J=\left\{M(a)/a\in I\right\}$ نعتبر التطبيق
$$g: J\to I,\quad M(a)\mapsto a$$

ا . بين أن g تقابل من J نحو I وحدد تقابله العكسي g^{-1}

ب . بين أنه لكل x و y من I
$$M(x)\times M(y)=g^{-1}\left[g\left(M(x)\right)*g\left(M(y)\right)\right]$$
واستنتج بنية $(J,\times)$ واذكرخاصية أخري ل g

F) ا **(2008)نعتبر $I=IR\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ والتطبيق**
$$f: I\to IR^*,\quad x\mapsto 1-3x$$

1. **بين أن f تقابل من I نحو IR^* وحدد تقابله العكسي** f^{-1}
2. **بين أن**
$$\forall (x,y)\in I^2 \quad x*y=f^{-1}\left(f(x)\times f(y)\right)=x+y-3xy$$

حيث $*$ هو القانون الداخلي المعرف على I كما في الجزء الأول

3. **بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية واذكرخاصية أخرى ل f**
4. **لكل x من I ولكل n من IN** نضع $x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$ و $x^{(0)}=0$

بين أن $(\forall x\in I)(\forall n\in IN)\ f\left(x^{(n)}\right)=\left(f(x)\right)^n$ ثم استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n

5. **في المجموعة IR نعتبر القانون الداخلي T المعرف ب**
$$\forall (x,y)\in IR^2 \quad x\mathrm{T}y=x+y-\frac{1}{3}$$

بين أن f تشاكل تقابلي من (IR,T) نحو $(IR,+)$ واستنتج أن $(IR,\mathrm{T},*)$ جسم تبادلي

G) ا **(2008)نعتبر**
$$E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & \frac{1}{\sqrt{3}}b\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix}/\,a,b\in IR\right\}$$
و $J=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$ **والتطبيق**
$$f: E^*\to\mathbb{C}^*,\quad M(a,b)\mapsto a+ib$$

1 . بين أن f تقابل من E^* نحو $\mathbb{C}^*$ وحدد تقابله العكسي f^{-1}

2. بين أن جزء مستقر من $\left(M_2\left(IR\right),\times\right)$

3 . بين أن

$$\forall\left(M,N\right)\in E^{*2}\quad M\times N = f^{-1}\left(f\left(M\right)\times f\left(N\right)\right)$$

4 . بين أن $\left(E^*,\times\right)$ **زمرة تبادلية واذكر خاصية أخرى ل** f

5. بين أن $\left(E,+,.\right)$ **فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي** $\left(M_2\left(IR\right),+,.\right)$ **واستنتج بنية** $\left(E,+,\times\right)$

6 . بين أن الأسرة $\left(I,J\right)$ **أساس ل** $\left(E,+,.\right)$

7 . حل في E **المعادلة** $J\times X^3 = I$ **حيث** $X^3 = X\times X\times X$

H)ع (2004)نعتبر

$$E=\left\{M\left(a\right)=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}/\,a\in IR^*\right\}$$

و والتطبيق

$$f : E\to\mathbb{R}^*$$
$$M\left(a\right)\mapsto a$$

1 . بين أن f **تقابل من** E **نحو** $\mathbb{R}^*$ **وحدد تقابله العكسي** f^{-1}

2 . بين أنه لكل a **و** b **من** $IR*$

$$M\left(a\right)\times M\left(b\right) = f^{-1}\left[f\left(M\left(a\right)\right)\times f\left(M\left(b\right)\right)\right]$$
$$= M\left(ab\right)$$

واستنتج بنية $\left(E,\times\right)$ **واذكرخاصية أخري ل** f

3 . **نعتبر**

$$F=\left\{N\left(a\right)=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a\end{pmatrix}/\,a\in IR^*\right\}$$

ا . **بين أنه لكل** a **و** b **من** $IR*$ $N\left(a\right)\times N\left(b\right)=N\left(\frac{b}{a}\right)$

ب . **نضع** $G=E\bigcup F$ **بين ان** $\left(G,\times\right)$ **زمرة**

ج . **هل** $\left(G,\times\right)$ **زمرة تبادلية**