امتحان تجريبي في الرياضيات
ماي 2011

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بما يلي: $u_{n+1}=\dfrac{9u_n-12}{2u_n-2}$ و $u_0=5$.

0.75 **1)** بيّن بالترجع أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n>4$.

1 **2) أ)** بيّن أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(-2u_n+3)(u_n-4)}{2u_n-2}$ و استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.

0.25 **ب)** استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

3) نضع لكلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{2u_n-3}{u_n-4}$.

1 **أ)** بيّن أنّ المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها 6.

0.5 **ب)** أكتب v_n بدلالة n.

0.75 **ج)** استنتج أنّ: $u_n=\dfrac{28\cdot 6^n-3}{7\cdot 6^n-2}$ لكلّ n من $\mathbb{N}$.

0.5 **د)** أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 2

نعتبر الدالة العددية: $\begin{cases} f(x)=x^2\ln x-\dfrac{3}{2}x^2-1 \\ f(0)=-1 \end{cases}$ و C_f منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 **1) أ)** أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

0.5 **ب)** أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

0.5 **2) أ)** بيّن أنّ f متّصلة على اليمين في 0.

0.75 **ب)** بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أنّ $f'_d(0)=0$.

0.5 **ج)** حدّد معادلة نصف المماس في النقطة $A(0,-1)$.

1 **3)** بيّن أنّ: $f'(x)=2x(\ln x-1)$; $x>0$.

1 **4)** أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيّرات، نأخذ: $f(e)\approx -4,7$.

1 — **5)** بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]5\ ,\ 4[$.

1.5+0.25 — **6)** أحسب $f(1)$ ثمّ أنشئ (C_f) .

1 — **7) أ)** أحسب التكامل $I=\int_1^e (\frac{3}{2}x^2+1)\,dx$.

1.25 — **ب)** باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ: $J=\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx=\frac{2e^3+1}{9}$.

0.75 — **ج)** حدّد مساحة الحيّز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ (لاحظ إشارة $f(x)$ على المجال $[1,e]$).

التمرين ③

يحتوي صندوق على 12 كرة بحيث: سبْع كرات حمراء منها ثلاثة تحمل رقم1 و أربعة تحمل رقم 2 .
و خمْس كرات سوداء: اثنتان تحمل رقم1 و ثلاثة تحمل رقم 2 .
كلّ الكرات غير قابلة للتمييز باللّمس.

I) نسحب عشوائياً بتتابع و دون إحلال 3 كرات.

0.75 — **1)** أحسب احتمال الحدثين A :< الكرات الثلاث المسحوبة تحمل الرّقم 2 >.

0.75 — B :< الكرات الثلاث المسحوبة حمراء >.

0.75 — **2)** علماً أنّ الكرات الثلاث المسحوبة تحمل الرقم 2 ، ما هو احتمال سحب ثلاث كرات حمراء ؟

0.75 — **3)** أحسب احتمال الحدث: C < سحب كرتين حمراوين تحملان الرّقم 1 و كرة سوداء >.

1.25 — **II)** نسحب عشوائياً و في آن واحد كرتين من الصندوق، نعتبر X المتغيّر العشوائي المرتبط بعدد الألوان المسحوبة. حدّد قانون احتمال X .

بالتوفيق