تصحيح الإمتحان الوطني الموحد للباكالوريا لمادة الرياضيات - الدورة العادية 2015

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها.

التمرين الأول:

1) أ- حساب المسافة $d\left(\Omega,(\mathscr{P})\right)$.

لدينا :المستوى $(\mathscr{P})$ معادلته هي: $x+y+z+4=0$ و $\Omega(1,-1,-1)$ نقطة من الفضاء.

إذن $$d\left(\Omega,(\mathscr{P})\right)=\frac{|1-1-1+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أن $d\left(\Omega,(\mathscr{P})\right)$ تساوي شعاع الفلكة (S) فإن $(\mathscr{P})$ مماس للفلكة (S).

ب- لدينا $\mathcal{H}(0,-2,-2)\in(\mathscr{P})$ لأن مثلوث إحداثيات النقطة $\mathcal{H}$ يحقق معادلة المستوى $(\mathscr{P})$

و $\Omega\mathcal{H}=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{3}$ إذن $\mathcal{H}$ هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى $(\mathscr{P})$.

2) نعتبر النقطتين $\mathcal{A}(2,1,1)$ و $\mathcal{B}(1,0,1)$.

أ- لدينا $\overrightarrow{O\mathcal{A}}(2,1,1)$ و $\overrightarrow{O\mathcal{B}}(1,0,1)$ إذن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\mathcal{A}}\wedge\overrightarrow{O\mathcal{B}}&=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{k}\\&=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x,y,z)\in(O\mathcal{A}\mathcal{B})&\Leftrightarrow\overrightarrow{O\mathcal{M}}.\left(\overrightarrow{O\mathcal{A}}\wedge\overrightarrow{O\mathcal{B}}\right)=0\\&\Leftrightarrow(1\times x)+(-1\times y)+(-1\times z)=0\\&\Leftrightarrow x-y-z=0\end{aligned}$$

ومنه $(O\mathcal{A}\mathcal{B}):x-y-z=0$.

ب- المستقيم (Δ) مار من Ω وموجه بـ: $\overrightarrow{O\mathcal{A}}\wedge\overrightarrow{O\mathcal{B}}$

إذن النظمة $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=-1-t\end{cases}$ تمثيل بارامتري لـ(Δ).

ج- تحديد نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والفلكة (S) .

$$\mathcal{M}(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=3\quad(1)\\x=1+t\\y=-1-t\\z=-1-t\end{cases}$$

لدينا $(1)\Leftrightarrow 3t^2=3$
$\Leftrightarrow t=1$ و $t=-1$ أ

بتعويض t نجد $(\Delta)\cap(S)=\{O(0,0,0);\mathcal{M}(2,-2,-2)\}$

التمرين الثاني:

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\mathcal{E}):\ z^2+10z+26=0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $(\mathcal{E})$.

لدينا $\Delta'=5^2-26=-1=i^2$ ومنه المعادلة $(\mathcal{E})$ تقبل حلين عقديين مترافقين .

$z_1=-5+i$ و $z_2=\overline{z_1}=-5-i$ وبالتالي $S=\{-5-i\ ;-5+i\}$.

2) أ– $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=\dfrac{-5+i+3}{-2+2i+3}=\dfrac{-2+i}{1+2i}=\dfrac{i(1+2i)}{1+2i}=i$.

ب–طبيعة المثلث $\Omega\mathcal{AB}$.

لدينا $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$ و $i=\left[1,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ومنه $\left|\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right|=1$ و $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega\mathcal{A}};\overrightarrow{\Omega\mathcal{B}}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

أي $\Omega\mathcal{A}=\Omega\mathcal{B}$ و $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega\mathcal{A}};\overrightarrow{\Omega\mathcal{B}}\right)}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ وبالتالي $\Omega\mathcal{AB}$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω .

3) أ–التمثيل العقدي للإزاحة $\mathcal{T}$ ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $6+4i$ هو :

$$\mathcal{T}:\mathcal{M}(z)\mapsto\mathcal{M}'(z')\ /\ z'=z+6+4i$$

لتكن $C(c)$ و $\mathcal{D}(d)$ لدينا :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(C)=\mathcal{D}&\Leftrightarrow d=c+6+4i\\&\Leftrightarrow d=-5-i+6+4i\\&\Leftrightarrow d=1+3i\end{aligned}$$

ب– لدينا $\dfrac{b-d}{a-d}=\dfrac{-5+i-1-3i}{-2+2i-1-3i}=\dfrac{-6-2i}{-3-i}=2$

إذن $b-d=2(a-d)$ ومنه $\mathcal{A}ff\left(\overrightarrow{\mathcal{DB}}\right)=2\mathcal{A}ff\left(\overrightarrow{\mathcal{DA}}\right)$ أي $\mathcal{A}ff\left(\overrightarrow{\mathcal{DB}}\right)=\mathcal{A}ff\left(2.\overrightarrow{\mathcal{DA}}\right)$

وبالتالي : $\overrightarrow{\mathcal{DB}}=2.\overrightarrow{\mathcal{DA}}$ ومنه $\mathcal{A}$ منتصف $[\mathcal{BD}]$.

التمرين الثالث:

يحتوي صندوق على ثماني كرات: 3 كرات حمراء – 3 كرات خضراء - كرتان بيضاوان .(لايمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق.

لدينا Ω هي مجموعة الترتيبات بدون تكرار لكرتين من بين ثماني كرات إذن $card\,\Omega=\mathcal{A}_8^2=8\times7=56$

1) نعتبر الحدث $\mathcal{A}$: " الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل "

لدينا الحدث $\overline{\mathcal{A}}$:" عدم الحصول على أية كرة بيضاء"

الحدث $\overline{\mathcal{A}}$ محقق إذا تم اختيار كرتين من بين 6 كرات (3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء)

وبالتالي : $card\left(\overline{\mathcal{A}}\right)=\mathcal{A}_6^2=30$ ومنه $p\left(\overline{\mathcal{A}}\right)=\dfrac{card\,\overline{\mathcal{A}}}{card\,\Omega}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$ وبالتالي :

$p(\mathcal{A})=1-p\left(\overline{\mathcal{A}}\right)=1-\dfrac{15}{28}=\dfrac{13}{28}$.

نعتبر الحدث $\mathcal{B}$:" الحصول على كرتين من نفس اللون "

الحدث $\mathcal{B}$ محقق إذا تم اختيار : كرتين من بين الكرات الثلاث الحمراء أو كرتين من بين الكرات الثلاث الخضراء أو الكرتين البيضاوين ، ومنه $card(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_3^2 + \mathcal{A}_3^2 + \mathcal{A}_2^2 = 6 + 6 + 2 = 14$

وبالتالي : $p(\mathcal{B}) = \dfrac{card\,\mathcal{B}}{card\,\Omega} = \dfrac{14}{56} = \dfrac{1}{4}$.

2) ليكن $\mathcal{X}$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.

أ- الحدث "$\mathcal{X} = 2$ " سحب كرتين بيضاوين .

$$p(\mathcal{X} = 2) = \frac{\mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_8^2} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

ب- قانون احتمال المتغير العشوائي $\mathcal{X}$.

لدينا $\mathcal{X}(\Omega) = \{0,1,2\}$.

الحدث $(\mathcal{X} = 0)$ عدم الحصول على أية كرة بيضاء.

الحدث $(\mathcal{X} = 1)$ الحصول على كرة بيضاء وكرة غير بيضاء مع مراعاة ترتيب الكرتين المسحوبتين.

الحدث $(\mathcal{X} = 2)$ الحصول على كرتين بيضاوين.

$p(\mathcal{X} = 0) = p(\overline{\mathcal{A}}) = \dfrac{15}{28}$ و $p(\mathcal{X} = 1) = 2\dfrac{\mathcal{A}_2^1 \times \mathcal{A}_6^1}{\mathcal{A}_8^2} = \dfrac{2 \times 2 \times 6}{8 \times 7} = \dfrac{3}{7}$.

x_i	0	1	2
$p(\mathcal{X} = x_i)$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{12}{28}$	$\dfrac{1}{28}$

حساب الأمل الرياضي: $\mathcal{E}(\mathcal{X}) = \left(0 \times \dfrac{15}{28}\right) + \left(1 \times \dfrac{12}{28}\right) + \left(2 \times \dfrac{1}{28}\right) = \dfrac{1}{2}$.

<u>المسألة:</u>

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x - 2x$.

1) لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x) = e^x - 2 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

ليكن x من $\mathbb{R}$ $\quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ell n2$

و $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ell n2$

و $g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ell n2$.

ومنه g تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,\ell n2]$ وتزايدية قطعا على المجال $[\ell n2,+\infty[$.

2) لدينا $g(\ell n2) = e^{\ell n2} - 2\ell n2 = 2 - 2\ell n2 = 2(1 - \ell n2)$.

بما أن $2 < e$ فإن $\ell n2 < 1$ ومنه $g(\ell n2) > 0$.

3) بما أن g تناقصية قطعا على $]-\infty,\ell n2]$ وتزايدية قطعا على $[\ell n2,+\infty[$

فإن $g(\ell n2)$ قيمة دنيا للدالة g على $\mathbb{R}$ إذن $g(x) \geq g(\ell n2) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

وبما أن $g(\ell n2)>0$ فإن $g(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-2x}$.

1) أ–لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^{*} \quad f(x)=\dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-2\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}-2}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}-2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}-2=-2$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

ب– التأويل الهندسي:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=-\dfrac{1}{2}$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

2) أ– f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و $$(\forall x\in\mathbb{R})\ f'(x)=\frac{e^{x}-2x-x\left(e^{x}-2\right)}{\left(e^{x}-2x\right)^{2}}=\frac{(1-x)e^{x}}{\left(e^{x}-2x\right)^{2}}$$

ب– إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $1-x$.

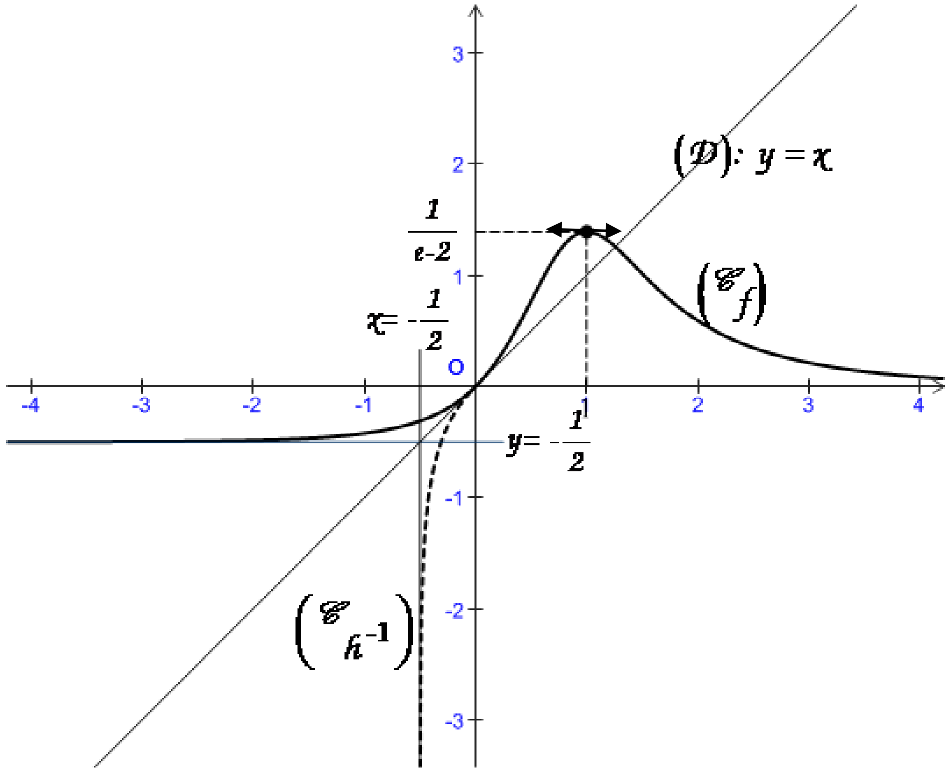
جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغيرات f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e-2}$	$\searrow$	0

ج– معادلة المماس $(\mathcal{T})$ للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O أصل المعلم هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي $(\mathcal{T}): y=x$.

3) إنشاء $\left(\mathscr{C}_{f}\right)$ منحنى الدالة f والمستقيم $(\mathcal{D})$ و $\left(\mathscr{C}_{h^{-1}}\right)$ منحنى الدالة h^{-1} في نفس المعلم .



4) أ–ليكن x من المجال $[0,+\infty[$.

$$1-2xe^{-x}\le 1 \Rightarrow e^{-x}\left(e^{x}-2x\right)\le 1$$
$$\Rightarrow e^{-x}\le \frac{1}{e^{x}-2x}$$
$$\Rightarrow xe^{-x}\le \frac{x}{e^{x}-2x}$$

من جدول تغيرات f نستنتج أن $\frac{1}{e-2}$ قيمة قصوى للدالة f على $[0,+\infty[$ إذن :

$$\left(\forall x\in[0,+\infty[\right)\qquad x e^{-x}\le \frac{x}{e^{x}-2x}\le \frac{1}{e-2}$$

ب– لنبين أن : $\int_0^1 x e^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$ باستعمال مكاملة بالأجزاء.

نضع $u(x)=x$ و $v'(x)=e^{-x}$

إذن $u'(x)=1$ و $v(x)=-e^{-x}$

وبالتالي :

$$\int_0^1 x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e}+\int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right) = 2-\frac{1}{e}$$

ج–لدينا $\mathcal{A}(\mathcal{E})=\int_0^1 f(x)\,dx\times 1cm^2$

من السؤال 4 – أ) نستنتج أن : $\forall x \in [0,1] \quad xe^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{e-2}$

إذن $\int_0^1 xe^{-x}\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2}dx$

ومنه $1-\frac{2}{e} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{e-2}\int_0^1 dx$

يعني $1-\frac{2}{e} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{e-2}[x]_0^1$

أي $1-\frac{2}{e} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{e-2}$

وبالتالي $\left(1-\frac{2}{e}\right) \leq \mathcal{A}(E) \leq \left(\frac{1}{e-2}\right)$.

(III 1) h دالة عددية معرفة على $]-\infty,0]$ بِـ : $h(x)=f(x)$ (h قصور f على المجال $]-\infty,0]$)

لدينا h متصلة وتزايدية قطعا على $]-\infty,0]$ إذن تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على:

$h(]-\infty,0]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = \left]-\frac{1}{2},0\right]$.

2) أنظر $\left(\mathcal{C}_{h^{-1}}\right)$ منحنى الدالة h^{-1} .

(IV (u_n) المتتالية العددية المعرفة بِـ: $u_0=-2$ و $u_{n+1}=h(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) لنبين بالترجع أن $u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

لدينا $u_0=-2$ إذن $u_0 \leq 0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$. نفترض أن $u_n \leq 0$ لنبين أن $u_{n+1} \leq 0$.

(h تزايدية على $\mathbb{R}^-$) $u_n \leq 0 \Rightarrow h(u_n) \leq h(0)$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq 0$

أذن $u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

لدينا $u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ إذن $h(u_n) \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (لأن : $h(x) \geq x \quad (\forall x \in]-\infty,0])$)

ومنه $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ وبالتالي المتتالية (u_n) تزايدية .

3) لدينا المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بِـ 0 إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

تحديد ℓ نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا : * h متصلة على $I=]-\infty,0]$.

* $h(I) \subset I$.

* $u_0 \in I$.

* (u_n) متقاربة .

إذن ℓ نهاية (u_n) حل للمعادلة $h(x)=x \quad (x \in I)$.

ليكن x من $I =]-\infty,0]$

$$h(x)=x \iff x=\frac{x}{e^{x}-2x}$$

$$\iff x\left(e^{x}-2x-1\right)=0$$

$$\iff x=0 \text{ أو } e^{x}-2x-1=0$$

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^{-}$ بِــ : $k(x)=e^{x}-2x-1$ إذن $\forall x\in\mathbb{R}^{-}\ k'(x)=e^{x}-2$

$$x\le 0 \iff e^{x}\le 1$$

$$\iff e^{x}-2\le -1$$

$$\Rightarrow e^{x}-2<0$$

$$\Rightarrow k'(x)<0$$

ومنه k تناقصية قطعا على $I =]-\infty,0]$. لدينا $k(0)=0$

لنبين أن : 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $k(x)=0$ على I .

نفترض أنه المعادلة $k(x)=0$ تقبل حلا آخر α من $]-\infty,0[$.

لدينا: (k دالة تناقصية على $\mathbb{R}^{-}$) $\alpha<0 \Rightarrow k(\alpha)>k(0)$

$$\Rightarrow 0>0$$

وهذا تناقض . إذن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $k(x)=0$ على I .

وبالتالي : $h(x)=x \iff x=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

*Etabli par : Skri M^ed^*