ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 01 الدورة الثانية: 2010/2009	الثانية باك علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير

$Durée : 04h$

■ التمرين رقم 01: $(02pts)$

← لتكن E مجموعة الدوال العددية f القابلة للإشتقاق ثلاث مرات على $\mathbb{R}$ ، بحيث :

f''' متصلة على $\mathbb{R}$ و تحقق : $(\forall x\in\mathbb{R});(x-1)f''(x)-xf'(x)+f(x)=0$.

1)- بين أن : $f\in E \Leftrightarrow \left[(\forall x\in\mathbb{R});f'''(x)=f''(x)\right]$.

2)- إستنتج أن E هي مجموعة الدوال العددية : $f:x\mapsto \lambda x+\mu e^{x}$ حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

■ التمرين رقم 02: $(03pts)$

← لتكن F مجموعة الدوال العددية f القابلة للإشتقاق ثلاث مرات على $\mathbb{R}$ و التي تحقق :

$(\forall x\in\mathbb{R});f'''(x)-2f''(x)-f'(x)+2f(x)=0$.

1)- ليكن f عنصرا من F ، نضع : $y=f'-2f$.

أ- بين أن y حل للمعادلة التفاضلية : $(E):y''-y=0$.

ب- حل المعادلة التفاضلية (E) .

2)- إستنتج أن F هي مجموعة الدوال: $f:x\mapsto \lambda e^{-x}+\mu e^{x}+\delta e^{2x}$ حيث $(\lambda,\mu,\delta)\in\mathbb{R}^3$.

3)- بين أنه توجد دالة وحيدة h من F تحقق : $h(0)=h'(0)=1$ و $h(\ln 2)=3$.

■ التمرين رقم03: $(03pts)$

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

و لتكن A و B النقطتين اللتان لحقاهما على التوالي $-a$ و a حيث $a\in\mathbb{C}^*$.

نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{5}$ و الدوران R_2 الذي مركزه B و زاويته $-\frac{4\pi}{5}$.

و لكل نقطة $M(z)$ مختلفة عن A و B ، نضع : $M_1=R_1(M)$ و $M_2=R_2(M)$ و ليكن z_1 و z_2 لحقي النقطتين M_1 و M_2 على التوالي .

1)- أحسب بدلالة a و z لحقي كل من $\overrightarrow{MM_1}$ و $\overrightarrow{MM_2}$.

1)- إستنتج أن : $\overline{\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}+\overline{\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)}\ [2\pi]$.

1)- حدد المجموعة (E_1) للنقط $M(z)$ بحيث تكون M و M_1 و M_2 نقطا مستقيمية .

4)- حدد المجموعة (E_2) للنقط $M(z)$ بحيث يكون المثلث MM_1M_2 قائم الزاوية في M .

■ **التمرين رقم 04:** $(04pts)$

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق φ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) حيث $z \neq 0$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$$z' = f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) .$$

1)- بين أن التطبيق φ شمولي .

2)- هل التطبيق φ تبايني؟ علل جوابك .

3)- أ- حدد صورة الدائرة المثلثية (C) بالتطبيق φ .

ب- حدد صورة المحور التخيلي (Oy) (محروم من O) بالتطبيق φ .

4)- بين أن للتطبيق φ نقطتين صامدتين A و B ينبغي تحديد لحقيهما a و b .

5)- لتكن $M(z)$ نقطة من (P) لا تنتمي إلى المحور التخيلي (Oy) و لتكن M_1 النقطة ذات اللحق $z_1 = \frac{-1}{z}$.

أ- بين أن النقط A و B و M و M_1 متداورة .

ب- بين أن : $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM_1})} \equiv \pi - \overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$.

ج- إستنتج طريقة للإنشاء الهندسي للنقطة $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالتطبيق φ .

■ **التمرين رقم05:** $(04pts)$

ليكن $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية الأعداد العقدية المعرفة بما يلي :

$z_0 = \cos\theta + i\sin\theta$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); z_{n+1} = z_n + |z_n|$.

1)- أكتب العدد z_1 على الشكل المثلثي .

2)- لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$\alpha_n \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); \alpha_n \equiv \arg(z_n)\ [2\pi]$.

← بين أن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية ، ثم عبر عن α_n بدلالة n .

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = z_n - \overline{z_n}$.

أ- عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n ، ماذا تستنتج ؟

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|z_n| = \dfrac{\sin\theta}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$.

4)- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + ... + |z_{n-1}|$.

5)- إستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$$\cot\text{an}\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cot\text{an}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + ... + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)} .$$

■ **التمرين رقم 06**: $(04pts)$

نعتبر العدد العقدي : $u = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

1)- أ- تحقق أن : $u \notin \{-i, i\}$.

ب- أكتب على الشكل المثلثي العددين $1+iu$ و $-1+iu$.

2)- نفترض أن : $\theta = \frac{-\pi}{8p+6}$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$.

أ- بين أن : $\sum_{k=0}^{4p+2} (iu)^k = \frac{-2}{-1+iu}$.

ب- إستنتج أن : $|-1+iu| \geq \frac{2}{4p+3}$.

ج- بين أن : $\sin\left[\frac{(2p+1)\pi}{8p+6}\right] \geq \frac{1}{4p+3}$.

3)- نفترض أن : $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و نضع : $f(u) = \frac{u(u-i)}{(u+i)^2}$.

أ- بين أن : $\overline{f(u)} = \frac{1+iu}{(-1+iu)^2}$.

ب- أكتب $\overline{f(u)}$ ثم $f(u)$ على الشكل المثلثي .

ج- لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(f(u))$ حيث θ يتغير في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

← بين أن (Γ) هي منحنى الدالة φ المعرفة على $]-\infty;0[$ بما يلي : $\varphi(x) = -\sqrt{\frac{|x|}{2}}$.

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطتان إضافيتان لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .