أولمبياد الرياضيات 2020

الفرض الثاني باللغتين العربية و الفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك **الشعبة : العلمية**

تاريخ التمرير : الجمعة 22 دجنبر 2017 **مدة الإنجاز : ساعتان**

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

التمرين 1 : لتكن m و n و p أعداداً صحيحة طبيعية غير منعدمة حيث $m+n+p=2017$.
حل المعادلة $x+my+nz+pt=2018$ ذات المجاهيل الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة x و y و z و t .

Exercice 1 : Soient m, n et p des entiers naturels non nuls tels que $m+n+p=2017$.
Résoudre l'équation $x+my+nz+pt=2018$ d'inconnues les entiers naturels non nuls x, y, z et t.

التمرين 2 :
1. لتكن a و b و u و v من $\mathbb{R}^{*+}$.
بيّن أن $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}\geq\frac{(a+b)^2}{u+v}$.
متى يتحقق التساوي ؟
2. لكل x و y و z من $\mathbb{R}^{*+}$ ، أثبت أن
$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}\geq 2(x+y+z)$$.

Exercice 2 :
1. Soient a, b, u et v de $\mathbb{R}^{*+}$.
Montrer que $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}\geq\frac{(a+b)^2}{u+v}$.
Quand est-ce-qu'on a l'égalité ?
2. Pour tout x, y et z de $\mathbb{R}^{*+}$, prouver que :
$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}\geq 2(x+y+z).$$

التمرين 3 : ليكن ABC مثلثاً و O مركز دائرته المحيطة $(\mathcal{C})$ و D النقطة المقابلة قطرياً للنقطة A . المستقيم المماس للدائرة $(\mathcal{C})$ في النقطة D يقطع المستقيم (BC) في نقطة P . نعتبر الحالة التي يقطع فيها المستقيم (OP) القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي في النقطتين N و M . بيّن أن : $OM=ON$.

Exercice 3 : Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit $(\mathcal{C})$ et D le point diamétralement opposé à A. La droite tangente à $(\mathcal{C})$ au point D coupe la droite (BC) en un point P. On considère le cas où la droite (OP) coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement aux points N et M. Montrer que : $OM=ON$.

التمرين 4 : نكتب الأعداد الصحيحة الطبيعية المتتابعة ، بدءاً من 1 ، في جميع خانات شبكة مستطيلة على النحو التالي : كل خانة تحتوي على عدد وحيد و في كل سطر يتم كتابة الأعداد مرتبة ترتيباً تزايدياً من اليسار إلى اليمين . العددان 100 و 193 كتبا في نفس العمود ، لكن العدد 100 كُتب في خانة من السطر الأوسط و العدد 193 كُتب في خانة من السطر الأخير . كم من عدد تمت كتابته في هذه الشبكة ؟

Exercice 4 : Nous écrivons les nombres entiers naturels consécutifs, commençant par 1, dans toutes les cases d'un tableau rectangulaire de la manière suivante : chaque case contient un seul nombre, dans chaque ligne les nombres sont écrits dans l'ordre croissant de gauche à droite. Les nombres 100 et 193 sont écrits sur la même colonne, mais le nombre 100 est écrit dans une case de la ligne du milieu et le nombre 193 est écrit dans une case de la dernière ligne. Combien de nombres sont écrits dans ce tableau ?