تمرين رقم 01:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x}.\ln x, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1)- بين أن f متصلة على اليمين في الصفر .

2)- احسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

3)- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر ، ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ، حيث : $g(x) = (x-1) - \ln x$.

ج- ادرس تغيرات g على $\mathbb{R}^{*+}$ و استنتج إشارتها ، ثم ضع جدول تغيرات f .

4)- حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة : $(E): f(x) = x$ ، ثم حدد إشارة $f(x) - x$ على $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

5)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6)- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}^+$.

ب- ارسم المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغاير للون (C_f)) .

7)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = e$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

8)- لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$v_0 = \frac{1}{e}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = f(v_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < v_n < 1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 02:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$(\forall x \in]0,+\infty[), f(x) = \frac{1}{x} + \ln|x|.$$

1)- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .

2)- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين في اتجاه ينبغي تحديده .

3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و أن :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

4)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$ ، ثم ادرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد أفصول نقطة انعطافه .

5)- أ- بين أن الدالة : $u : x \mapsto f(x) - x$ تزايدية قطعا على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

ب- استنتج الموضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$.

6)- أ- بين أن (C_f) يقطع المحور (Ox) في نقطة وحيدة أفصولها α و أن $\alpha \in]-2,-1[$.

ب- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty,0[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $(g^{-1})'(0) = \frac{-1}{\ln(-\alpha) + (\ln(-\alpha))^2}$.

ج- ارسم المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغاير للون المنحنى (C_f)) .

8)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0 = e$ و $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (استعمل نتيجة السؤال 5) ب-) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 03:

1)- بين أن : $(\forall x\in]0,1[), \ln(1+x)\le x\le -\ln(1-x)$.

2)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}), \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\le u_n\le \ln\left(2+\frac{1}{n-1}\right)$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين رقم 04:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$f(0)=0$ و $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f(x)=\frac{x}{1+x\ln x}$.

1)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), 1+x\ln x>0$ ، ثم استنتج D_f .

2)- بين أن f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

3)- بين أن المحور (Ox) مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f'(x)=\frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

5)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), x-f(x)=\frac{x^2.\ln x}{1+x\ln x}$ ، ثم حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

6)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=\frac{1}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<u_n<1$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

د- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $V_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), \ln(V_n)=-2+\frac{1}{u_n}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين رقم 05:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي :

$(\forall x\in I), f(x)=\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$.

1)- تحقق أن : $(\forall x\in I), f(x)=1-\frac{4}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$.

2)- أ- حدد على I مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

ب- أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على I و التي تحقق : $F(0)=0$.

تمرين رقم 06:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f(x)=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$.

1)- احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

2)- احسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

3)- أ- حل في $\mathbb{R}^{*+}$ المعادلة : $(E): f(x)=x$.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

4)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

6)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=\frac{3}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 1<u_n<2$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 07:

✓ احسب كل نهاية مما يلي :

$(1): \lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ، $(2): \lim_{x\to 0^-} x\ln\left(x^2-x\right)$ و $(3): \lim_{x\to+\infty}\left[x-(\ln x)^2\right]$

$(4): \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}$ ، $(5): \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ و $(6): \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

و $(7): \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-\ln(e-x)}$.

تمرين رقم 08:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$f(x)=\sqrt{x.\ln(x+1)}$.

1)- أ- بين أن : $D_f=]-1,+\infty[$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا عموديا ينبغي تحديده .

ج- احسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

2)- ادرس قابلة اشتقاق f على اليمين و على اليسار في الصفر . ماذا تستنتج ؟

4)- أ- بين أن : $(\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[), f'(x)=\frac{g(x)}{2\sqrt{x\ln(1+x)}}$ ، حيث g هي الدالة المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln(1+x)$.

ب- بين أن g تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$ ، ثم استنتج إشارتها (لاحظ أن : $g(0)=0$) .

ج- حدد رتابة على المجالين $]-1,0]$ و $[0,+\infty[$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .

5)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n>0$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 09:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$f(0)=1$ و $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[), f(x)=x+1-\frac{1}{\ln x}$.

1)- أ- احسب النهايتين : $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ، ثم أعط تأويلهما الهندسي .

ب- بين أن f متصلة على اليمين في الصفر .

2)- أ- احسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=x+1$.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و مقاربه المائل (Δ) .

3)- أ- بين أن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=+\infty$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

ب- بين أن : $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[), f'(x)=1+\frac{1}{x(\ln x)^2}$ ، ثم استنتج رتابة f على كل مجال من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$.

4)- بين أن : $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[), f''(x)=-\frac{2+\ln x}{x^2(\ln x)^3}$ ، ثم ادرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد أفصول نقطة انعطافه .

5)- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع المحور (Ox) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $\frac{5}{4}<\alpha<\frac{3}{2}$.

ب- بين أن : $f(\alpha)=\frac{\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha}$.

6)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6)- لتكن g الدالة f على المجال $I=]1,+\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- ارسم المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=e^2$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=g^{-1}(u_n)$.

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n>e$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 10:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f(x)=-x+1+2\ln x$.

1)- أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا عموديا ينبغي تحديده .

ج- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x+f(x)$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[), f'(x)=\frac{2-x}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

ب- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[), f''(x)=\frac{-2}{x^2}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

3)- بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2,+\infty[$ بحيث $\alpha\in]3,4[$.

4)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (لاحظ أن : $f(1)=0$) .

5)- لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} a_0=3 \\ (\forall n\in\mathbb{N}), a_{n+1}=1+2\ln(a_n)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b_0=4 \\ (\forall n\in\mathbb{N}), b_{n+1}=1+2\ln(b_n)\end{cases}$$

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 2<a_n<\alpha<b_n$.

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا و أن المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا .

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{2}{3}(b_n-a_n)$.

يمكنك البرهنة على المتفاوتة : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), \ln x\le x-1$ و تطبيقها .

د- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<b_n-a_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان و لهما نفس النهاية محددا نهايتهما المشتركة .

تمرين رقم 11:

I- لتكن g الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$g(x)=\ln x+x-3$.

1)- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$.

2)- بين أن المعادلة : $g(x)=0$ يقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$ بحيث : $\alpha\in]2,3[$.

3)- استنتج مما سبق إشارة الدالة g على كل مجال من المجالين $]\alpha,+\infty[$ و $]0,\alpha[$.

4)- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر و أن $(g^{-1})'(0)=\frac{\alpha}{\alpha+1}$.

II- لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1)- احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ، ثم أعط تأويلها الهندسي .

2)- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه ينبغي تحديده .

3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}), f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

4)- بين أن : $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

5)- حل المعادلة : $f(x)=0$ ، ثم استنتج أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المحور (Ox) .

6)- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعطي : $\alpha\simeq2,2$ و $f(\alpha)\simeq-0,65$.

Fin du sujet