I- تقديم :

النصوص الرياضية هي كل تجميع لكلمات وحروف ورموز مثل :

A_1 : "$2+6=3$"

A_2 : "$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$"

A_3 : "$(m,n)\in\mathbb{N}^2 ; m-n=5$"

A_4 : "$x\in\mathbb{Z} ; x-5\leq 0$"

يمكن أن تكون هذه النصوص معرفة بالكامل مثل : A_1 و A_2 ؛ ويمكن أن تحتوي على متغير واحد أو أكثر مثل : A_3 و A_4 .

II- تعاريف :

1. العبارة : La proposition

أ- تعريف :

نسمي **عبارة** كل نص رياضي يحمل معنى (إما أن يكون صحيحا وإما أن يكون خاطئا)
* ولا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في آن واحد *

أمثلة : المعنى الذي يحمله النص A_1 خاطئ ؛ إذن النص A_1 عبارة . نقول إن قيمة حقيقة العبارة A_1 هي : خاطئ (F أو 0).
المعنى الذي يحمله النص A_2 صحيح ؛ إذن النص A_2 عبارة . نقول إن قيمة حقيقة العبارة A_1 هي : صحيح (V أو 1) .
النصان A_3 و A_4 ليسا عبارة؛ لأنه لا يمكن أن نحسم في صحتها أو خطئها .

ب- اصطلاح : إذا كانت عبارة P صحيحة؛ فإننا نكتب : **لدينا** P . مثلا : لدينا : $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي : أعط مثالا لعبارة خاطئة ومثالا لعبارة صحيحة .

2. الدالة العبارية : Fonction propositionnelle

النص A_4 يصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر محدد من $\mathbb{R}$. النص A_4 يسمى دالة عبارية.

أ- تعريف :

نسمي **دالة عبارية** كل نص رياضي؛ يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معينة ؛ ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة .

ب - أمثلة : A_4 دالة عبارية لمتغير x معرفة على $\mathbb{R}$.
A_3 دالة عبارية للمتغيرين m و n معرفة على $\mathbb{N}^2$.

ج - اصطلاح :

- حسب عدد المتغيرات ؛ نرمز للدوال العبارية ب : $P(x)$ ؛ $Q(x)$ ؛ $A(x)$ ؛ $B(x,y)$ ؛ $P(m,n)$ ؛ ...
- الدالة العبارية $A(x)$ تسمى أيضا : **خاصية للمتغير** x .

د - تمرين تطبيقي :

i. أعط مثالا لخاصية لمتغير واحد .
ii. لتكن $P(x)$ الدالة العبارية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $P(x):\quad x\in\mathbb{Z};\quad |x-3|\leq 4$.
a. هل 2- يحقق الخاصية $P(x)$. b. حدد العناصر التي تحقق الخاصية $P(x)$.

III- المكممات : Les Quantificateurs

1. المكمم الكوني : Les Quantificateurs Universels

أ- تعريف :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E . إذا كانت $P(x)$ صحيحة لكل x من E ؛
فإننا نكتب : $P(x)\quad:\quad\forall x\in E$ ؛ ونقرأ : مهما يكن x من E ؛ لدينا $P(x)$.
الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

ب - مثال : لتكن $P(x)$ الدالة العبارية المعرفة بما يلي : $P(x)\quad:\quad x^2+4\geq 0$.
لدينا $P(x)$ صحيحة لكل x من $\mathbb{R}$. إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad:\quad x^2+4\geq 0$.

2. المكمم الوجودي : Les Quantificateurs Existentiels

أ- تعريف :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E . إذا وجد على الأقل عنصر x من E
يحقق $P(x)$ ؛ فإننا نكتب : $P(x)\quad:\quad\exists x\in E$. ونقرأ : يوجد على الأقل x من E يحقق $P(x)$.
الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي .

ب - مثال : حدد قيمة حقيقة ما يلي :

$A(x):\ \forall x\in$ ß $,\ x-5\geq 0$ ü

$B(n):\ \forall n\in$ à $,\ 3n-27=0$ ü

$C(x):\ \exists x\in$ ß $/\ x^2-9\geq 0$ ü

$D(m):\ \exists m\in$ à $/\ 3m+6=0$ ü

3. المكمم الوجودي للوحدانية :

تعريف :

العبارة : **يوجد عدد وحيد** n من à بحيث $n+2=1$ تكتب على شكل : $\exists!n\in$ à $/\ n+2=1$.

4. عبارة تحتوي على عدة مكممات :

مثال1 : 1. أكتب العبارتين التاليتين دون استعمال المكممات :

$P:\ \forall x\in$ ß$,\ \exists y\in$ ß$;\ x=y$

$Q:\ \exists y\in$ ß$,\ \forall x\in$ ß$;\ x=y$

2. هل لـ P و Q نفس المعنى ؟

مثال 2 : العبارة : $\forall n\in$ ã$,\ \exists m\in$ ã$;\ n<m$ هي عبارة صحيحة .

العبارة : $\exists m\in$ ã$,\ \forall n\in$ ã$;\ n<m$ هي عبارة خاطئة .

خاصية :

ü إذا كانت المكممات من طبيعة مختلفة ؛ فإن ترتيبها يكون ذو أهمية .

ü إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة ؛ فإن ترتيبها ليس له أي أهمية .

IV- العمليات المنطقية :

1. النفي المنطقي : La Négation Logique

مثال : لتكن العبارة : $(P):\ "5+4=9"$. العبارة $"5+4\neq 9"$ تسمى نفي العبارة P ونرمز لها بالرمز : $\neg P$ ؛

ونكتب : $(\neg P):\ "5+4\neq 9"$.

a. **تعريف** :

لتكن P عبارة . نفي العبارة P هي العبارة التي تكون صحيحة إذاكانت P خاطئة ؛ وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة ؛ ويرمزلها بالرمز $\neg P$ أو $\overline{P}$.

مثال : حدد نفي العبارات التالية : $(P):\ "\sqrt{2}\in$ â$"$. $(Q):\ "-2+7=8"$. $(R):\ "5>8"$.

تصحيح : $(\neg P):\ "\sqrt{2}\notin$ â$"$. $(\neg Q):\ "-2+7\neq 8"$. $(\neg R):\ "5\leq 8"$.

b. **جدول حقيقة النفي المنطقي** :

لتكن P عبارة . الرمز V أو 1 يعني أن P عبارة صحيحة ؛
الرمز F أو 0 يعني أن العبارة P خاطئة .

P	$\neg P$
V	F
F	V

مثال : أعط جدول حقيقة العبارة $\neg(\neg P)$.
ماذا تستنتج ؟

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

2. نفي عبارة مكممة : Négation d'une proposition

ü نفي العبارة : $"\forall x\in E,\ \ P(x)"$ هي العبارة : $"\exists x\in E,\ \ \neg P(x)"$.

ü نفي العبارة : $"\exists x\in E,\ \ P(x)"$ هي العبارة : $"\forall x\in E,\ \ \neg P(x)"$.

3. الفصل المنطقي : Disjonction de deux proposition

a. **تعريف** :

لتكن P و Q عبارتين . **فصل العبارتين** P و Q هي العبارة التي تكون صحيحة , إذا كانت إحدى العبارتين P و Q على الأقل صحيحة ؛ وتكون خاطئة , إذا كانت P و Q خاطئتين معا . ونرمز له بالرمز : (P أو Q) أو $(P\vee Q)$

أمثلة :

A : $"3<4$ أو $7=8"$ عبارة صحيحة .

B : $"3>0$ أو $2+5=7"$ عبارة صحيحة .

C : $"2,4\in$ â أو $5^2=52"$ عبارة خاطئة .

جدول حقيقة الفصل المنطقي :

P	Q	P **أو** Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

b . **ملاحظتين :**

- "Q أو P" و "P أو Q" لهما نفس جدول الحقيقة . نقول إن عملية الفصل المنطقي **تبادلية** .
- "P أو $(Q$ أو $R)$" و "$(P$ أو $Q)$ أو R" لهما نفس جدول الحقيقة . إذن عملية الفصل المنطقي **تجميعية** .

4. العطف المنطقي : Conjonction de deux propositions

a. **تعريف :**

لتكن P و Q عبارتين منطقيتين .
عطف العبارتين P و Q , هي العبارةالتي تكون صحيحة إذا كانت P و Q صحيحتين معا ؛ وتكون خاطئة فيما عدا ذلك ؛ ونرمز لها بالرمز : $(P$ و $Q)$ أو $(P \wedge Q)$.

أمثلة :

A : "$3<5$ و $-4=1$" عبارة خاطئة .
B : "$3 \in \mathbb{N}$ و $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$" عبارة صحيحة .
C: "$\left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$ و $9^2=18$" عبارة خاطئة .

جدول حقيقة العطف المنطقي :

P	Q	P **و** Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

b. **ملاحظتين :**

- $(P$ و $Q)$ و $(Q$ و $P)$ لهما نفس جدول الحقيقة. نقول إن عملية العطف المنطقي **تبادلية** .
- "$(P$ و $Q)$ و R" و "P و $(Q$ و $R)$" لهما نفس جدول الحقيقة . إذن العطف المنطقي **عملية تجميعية** .

مثال : حدد قيمة حقيقة العبارة التالية : "$(2>7$ أو $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$ و $7^2=49$" .

5 . الإستلزام المنطقي : Implication logique

a. **تعريف :**

لتكن P و Q عبارتين منطقيتين .
العبارة Q أو $\neg P$ تسمى إستلزام العبارتين P و Q (في هذا الترتيب) وتكون خاطئة إذاكانت P صحيحة و Q خاطئة؛ وتكون خاطئة فيما عدا ذلك ؛ ونرمز لها بالرمز : $P \Rightarrow Q$ ؛ ونقرأ P تستلزم Q .

جدول حقيقة الإستلزام المنطقي :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة :

$-2=5 \Rightarrow 4^2=16$ هي عبارة خاطئة .
4 عدد زوجي $\Rightarrow$ $3<0$ هي عبارة صحيحة .
6 عدد فردي $\Rightarrow 3=1-4$ هي عبارة خاطئة .
ليكن ABC مثلثا . (AM متوسط المثلث ABC $\Rightarrow$ M منتصف القطعة $[BC]$) هي عبارة صحيحة .

b. **ملاحظتين :** $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ ليس لهما نفس جدول الحقيقة ؛ إذن عملية الإستلزام المنطقي **ليست تبادلية**.

مثال 1 : بين أن : $\forall a\in \mathbb{R}:\quad a>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geq 2$.

منهجية :

للبرهنة على أن $P\Rightarrow Q$ صحيحة ؛ يكفي أن نفترض أن P عبارة صحيحة ونبرهن أن Q عبارة صحيحة .

تصحيح المثال : ليكن $a\in \mathbb{R}$.

نفترض أن $a\in \left]0,+\infty\right[$. ونبين أن : $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

لدينا : $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$ لأن : $(a-1)^2\geq 0$ و $a>0$.

إذن : $a+\frac{1}{a}\geq 2$. وبالتالي فإن : $\forall a\in \mathbb{R}:\quad a>0\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geq 2$.

مثال 2 : بين أن : $\forall (a,b)\in \mathbb{R}^2:\quad \left(|a|<1 \text{ و } |b|<1\right)\Rightarrow |a+b|<|1+ab|$.

تصحيح : ليكن $(a,b)\in \mathbb{R}^2$. نفترض أن : $|a|<1$ و أن $|b|<1$. ونبين أن : $|a+b|<|1+ab|$.

لدينا : $|a|<1$ و أن $|b|<1$. إذن : $a^2<1$ و $b^2<1$. ومنه فإن : $a^2-1<0$ و $1-b^2>0$.

إذن : $\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)<0$. أي : $a^2+b^2-a^2b^2-1<0$. ومنه : $a^2+b^2+2ab<1+2ab+a^2b^2$

يعني : $(a+b)^2<(1+ab)^2$. أي : $\sqrt{(a+b)^2}<\sqrt{(1+ab)^2}$. يعني : $|a+b|<|1+ab|$.

أو نتبع الخطوات التالية :

$$\begin{aligned}
|a|<1 \text{ و } |b|<1 &\Rightarrow a^2<1 \text{ و } b^2<1\\
&\Rightarrow a^2-1<0 \text{ و } 1-b^2>0\\
&\Rightarrow \left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)<0\\
&\Rightarrow a^2+b^2-a^2b^2-1<0\\
&\Rightarrow a^2+b^2+2ab<1+2ab+a^2b^2\\
&\Rightarrow (a+b)^2<(1+ab)^2\\
&\Rightarrow \sqrt{(a+b)^2}<\sqrt{(1+ab)^2}\\
&\Rightarrow |a+b|<|1+ab|
\end{aligned}$$

هذه الطريقة تسمى البرهان بالإستلزامات المتوالية .

ملاحظة :

- يقرأ $P\Rightarrow Q$:
  - P يستلزم Q .
  - إذاكان P فإن Q .
  - P شرط كاف لتحقيق Q .
  - Q شرط لازم ل P .
- $Q\Rightarrow P$ يسمى : **الإستلزام العكسي** للإستلزام $P\Rightarrow Q$.

6. التكافؤ المنطقي : Equivalence logique

a. تعريف :

لتكن P و Q عبارتين منطقيتين .

العبارة " $P\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow P$ " تسمى **تكافؤ** العبارتين P و Q ونرمزلها بالرمز $P\Leftrightarrow Q$.

وتكون صحيحة فقط إذا كانت P و Q صحيحتين في آن واحد أو كانت P و Q خاطئتين في آن واحد . وتكون خاطئة فيما عدا ذلك .

وتقرأ : P تكافئ Q أو P إذا وفقط إذا كان Q .

أمثلة :

- A : " $8^2+6^2=10^2\Leftrightarrow 5<20$ " هي عبارة صحيحة .

ü B: "$4=5 \Leftrightarrow 3>2$" هي عبارة خاطئة .
ü C: "$5=2+3 \Leftrightarrow 4=6-2$" هي عبارة صحيحة .

مثال 1: بين أن لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا a و b بحيث $a+b=1$ ؛ لدينا : $\left(1+\frac{1}{a}\right)\times\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$.

منهجية :

لكي نبين أن عبارة P صحيحة ؛ يكفي أن نبين أنها تكافئ عبارة Q نعلم مسبقا أنها صحيحة .

تصحيح :

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا بحيث $a+b=1$ ؛ لدينا :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{a}\right)\times\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9 &\Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{a}\right)\times\left(\frac{b+1}{b}\right)\geq 9\\
&\Leftrightarrow \frac{ab+a+b+1}{ab}\geq 9\\
&\Leftrightarrow \frac{ab+2}{ab}\geq 9\\
&\Leftrightarrow 1+\frac{2}{ab}\geq 9\\
&\Leftrightarrow \frac{2}{ab}\geq 8\\
&\Leftrightarrow 4ab\leq 1\\
&\Leftrightarrow 4ab\leq (a+b)^2\\
&\Leftrightarrow 4ab\leq a^2+b^2+2ab\\
&\Leftrightarrow 4ab-a^2-b^2-2ab\leq 0\\
&\Leftrightarrow -\left(a^2-2ab+b^2\right)\leq 0\\
&\Leftrightarrow -(a-b)^2\leq 0
\end{aligned}$$

وبما أن $-(a-b)^2\leq 0$ عبارة صحيحة ؛ فإن $\left(1+\frac{1}{a}\right)\times\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$ عبارة صحيحة .

هذه الطريقة تسمى **البرهان بالتكافؤات المتوالية** .

مثال 2 : ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$. بين أن : $\left[a^2=b^2 \text{ و } ab>0\right]\Leftrightarrow[a-b=0]$.

تصحيح : ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$. سنبين أن : $\left[a^2=b^2 \text{ و } ab>0\right]\Leftarrow[a-b=0]$

وأن : $\left[a^2=b^2 \text{ و } ab>0\right]\Rightarrow[a-b=0]$

$(\Rightarrow)$: نفترض أن $a-b=0$ ؛ ونبين أن : $a^2=b^2$ و $ab>0$. لدينا : $a-b=0$ إذن $a=b$ ومنه $a^2=b^2$

وبما أن $a=b$, فإن : $ab=b^2>0$. وبالتالي فإن : $\boxed{a^2=b^2 \text{ و } ab>0}$.

$(\Leftarrow)$: نفترض أن $a^2=b^2$ و $ab>0$ ؛ ونبين أن : $a-b=0$. لدينا : $a^2=b^2$ ؛ إذن : $a^2-b^2=0$. أي :

$(a-b)(a+b)=0$. ومنه $a-b=0$ أو $a+b=0$.

إذا كان $a+b=0$ ؛ فإن $a=-b$. إذن $ab=-b^2<0$. وهذا يتناقض مع كون $ab>0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{a-b=0}$.

منهجية :

- عملية التكافؤ المنطقي عملية تبادلية وتجميعية .
- للبرهنة على صحة تكافؤ $P\Leftrightarrow Q$ ؛ غالبا ما نبرهن على صحة الإستلزام المباشر $P\Rightarrow Q$ وصحة الإستلزام العكسي $Q\Rightarrow P$.

مثال : أعط قيمة حقيقة ما يلي :

(A): $x=2\Rightarrow x^2-5x+6=0$ و (B): $x^2-5x+6=0\Rightarrow x=2$

و (C): $x=2\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

ملاحظات :

- الروابط المنطقية التي تعبر عن الإستلزام (اتجاه واحد) هي : **إذن ؛ ومنه ؛ وبالتالي ؛ وعليه ؛ إذاكان...فإن ؛ بما أن...فإن ؛ ...**
- الروابط المنطقية التي تعبر عن التكافؤ (اتجاهين) هي : **تكافئ ؛ يعني ؛ إذاوفقط إذاكان ؛ أي ؛ ...**
- عبارتان متكافئتان تحملان نفس المعنى ؛ لكن بطريقتين مختلفتين .

V- القوانين المنطقية :

1. مثال : لتكن P عبارة . أعط جدول حقيقة (P أو $\neg P$) .

P	$\neg P$	P أو $\neg P$
1	0	1
0	1	1

نلاحظ أن(P أو $\neg P$) تكون دائما صحيحة (مهما كانت قيمة حقيقة P)

العبارة(P أو $\neg P$) تسمى **قانونا منطقيا** .

تعريف : القوانين المنطقية هي عبارات مكونة من عدة عبارات A و B و C ... مرتبطة فيما بينها بالروابط المنطقية : ¬ ؛ و ؛ أو ؛ $\Rightarrow$ ؛ $\Leftrightarrow$ وتكون **صحيحة** مهما كانت قيمة حقيقة العبارات A و B و C.

ملاحظة : إذا كان لعبارتين P و Q نفس المعنى (نفس جدول الحقيقة) فإن : $P \Leftrightarrow Q$ **قانون منطقي** .

مثال : العبارات التالية قوانين منطقية :

- $(P \text{ و } P) \Leftrightarrow P$
- $(P \text{ أو } P) \Leftrightarrow P$
- $(P \text{ و } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ و } P)$

تمرين تطبيقي : نحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية : $(E) : \begin{cases} x+4y=5 \\ 2x+8y=10 \end{cases}$.

لدينا :

$$\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x+8y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=5 \\ \cancel{2}\times(x+4y)=\cancel{2}\times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=5 \\ x+4y=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+4y=5$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول النظمة (E) هي : $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+4y=5\}$

نتيجة 1 :

$$[P \text{ و } (Q \text{ أو } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ و } Q) \text{ أو } (P \text{ و } R)]$$

$$[P \text{ أو } (Q \text{ و } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ أو } Q) \text{ و } (P \text{ أو } R)]$$

مثال :

نحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية : $(E) : \begin{cases} x^2-16=0 \\ y^2-9=0 \end{cases}$. لدينا :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4)=0 \\ (y-3)(y+3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4=0) \vee (x+4=0) \\ (y-3=0) \vee (y+3=0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x=4) \vee (x=-4) \\ (y=3) \vee (y=-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [(x=4)\vee(x=-4)] \wedge [(y=3)\vee(y=-3)]$$

$$\Leftrightarrow [(x=4)\wedge(y=3)] \vee [(x=4)\wedge(y=-3)] \vee [(x=-4)\wedge(y=3)] \vee [(x=-4)\wedge(y=-3)]$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول النظمة (E) هي : $S=\{(4,3);(4,-3);(-4,3);(-4,-3)\}$

2. قانونا مورغان : Lois de Morgan

قانونا مورغان : i: نفي العبارة $(P \text{ أو } Q)$ هي العبارة $(\neg P \text{ و } \neg Q)$.

ii: نفي العبارة $(P \text{ و } Q)$ هي العبارة $(\neg P \text{ أو } \neg Q)$.

أي : $\boxed{\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)}$; $\boxed{\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)}$

مثال : نعتبر العبارتين التاليتين : $(R): \exists x \in \mathbb{R} \quad 8 = 9$ و $7 \in \mathbb{N}$ ؛ $(S): \forall x \in \mathbb{R} \quad 9 \notin \mathbb{N}$ أو $2 \leq 8$

حدد نفي العبارتين R و S.

تصحيح : $(\neg R): \forall x \in \mathbb{R} \quad 8 \neq 9$ أو $7 \notin \mathbb{N}$ ؛ $(\neg S): \exists x \in \mathbb{R} \quad 9 \in \mathbb{N}$ و $2 > 8$

ملاحظة : العبارتان $P \Leftrightarrow Q$ و $\neg P \Leftrightarrow \neg Q$ متكافئتان : لهما نفس جدول الحقيقة.

مثال : نعلم أن $(ab = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ أو } b = 0)$. إذن : $\neg(ab = 0) \Leftrightarrow (\neg(a = 0) \text{ و } \neg(b = 0))$

أي : $\boxed{(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ و } b \neq 0)}$

3. الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس : Implication contraposée

تعريف : نعتبر الإستلزام $P \Rightarrow Q$. الإستلزام $\neg Q \Rightarrow \neg P$ يسمى **الإستلزام المضاد للعكس** للإستلزام $P \Rightarrow Q$

خاصية : الإستلزام $P \Rightarrow Q$ والإستلزام المضاد للعكس $\neg Q \Rightarrow \neg P$ لهما نفس قيمة الحقيقة (نفس المعنى)

تمرين تطبيقي : ليكن a و b عددين حقيقيين . بين أن : $(a \neq 1 \text{ و } b \neq 1) \Rightarrow (a + b - ab \neq 1)$.

لدينا :

$$(a + b - ab = 1) \Rightarrow (a - ab - 1 + b = 0)$$
$$\Rightarrow (a(1-b) - (1-b) = 0)$$
$$\Rightarrow ((a-1)(1-b) = 0)$$
$$\Rightarrow ((a-1=0) \text{ أو } (b-1=0))$$
$$\Rightarrow ((a=1) \text{ أو } (b=1))$$

وبالتالي فإن : $(a \neq 1 \text{ و } b \neq 1) \Rightarrow (a + b - ab \neq 1)$.

4. الإستدلال بفصل الحالات : Raisonnement par disjonction des cas

مثال : بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ لدينا : $n^3 - n$ تقبل القسمة على 3 .

تصحيح : ليكن $n \in \mathbb{N}$. ليكن $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. نقول إن a **يقبل القسمة** على b في $\mathbb{N}$ إذا وجد k من $\mathbb{N}$ بحيث $a = kb$.

<u>الحالة 1:</u> إذا كان $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ (أي : باقي القسمة الأقليدية ل n على 3 هو 0 أو n قابل للقسمة على 3)؛

فإن : $n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k) = 3k'$ حيث $k' = 9k^3 - k \in \mathbb{N}$.

إذن : $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .

<u>الحالة 2 :</u> إذا $n = 3k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$ (أي : باقي القسمة الأقليدية ل n على 3 هو 1)؛ فإن :

$$n^3 - n = (3k+1)^3 - (3k+1) = (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + \cancel{1} - 3k - \cancel{1} = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k) = 3k'$$

حيث $k' = 9k^3 + 9k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. إذن : $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .

<u>الحالة 3 :</u> إذا $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ (أي : باقي القسمة الأقليدية ل n على 3 هو 2)؛ فإن :

$$n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2) = 3k'$$

حيث $k' = 9k^3 + 18k^2 + 11k + 2 \in \mathbb{N}$. إذن : $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .

في جميع الحالات لدينا : $n^3 - n$ تقبل القسمة على 3 . إذن $\boxed{\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ؛ لدينا : } n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3}$.

خاصية :

لتكن P و Q عبارتين . لكي نبين أن العبارة Q صحيحة ؛ نميز بين حالتين (أو عدة حالات) :

إذاكانت P عبارة صحيحة وكان الإستلزام $[P \Rightarrow Q]$ صحيحا؛ فإن Q عبارة صحيحة .

إذاكانت العبارة $(\neg P)$ صحيحة وكان الإستلزام $[(\neg P) \Rightarrow Q]$ صحيحا؛ فإن Q عبارة صحيحة .

5. الإستدلال بالخلف: Raisonnement par l'absurde

خاصية :

لتكن P و Q عبارتين.
إذا كان الإستلزام $\left[(\neg Q)\Rightarrow P\right]$ صحيحا و كانت العبارة P خاطئة ؛ فإن العبارة $(\neg Q)$ تكون خاطئة وبالتالي فإن العبارة Q صحيحة .

منهجية : لكي نبين أن عبارة Q صحيحة ؛ نفترض أنها خاطئة. أي $(\neg Q)$ صحيحة ؛ ثم نبحث عن تناقض ؛ ونستنتج أن $(\neg Q)$ عبارة خاطئة . .إذن عكسها هو الصواب أي : Q عبارة صحيحة .

مثال : a و b عددان حقيقيان بحيث : $(*): \forall x \in$ ß $: \quad a \leq x \Rightarrow b < x$. بين أن : $b < a$.

تصحيح : نفترض أن $b \geq a$. إذن $b \in$ ß و $a \leq b$ ومنه؛ حسب $(*)$ ؛ نجد أن $b < b$ و هذا تناقض, وعليه فإن ما افترضناه خاطئ و عكسه هو الصواب . أي : $b < a$.

6. الإستدلال بالترجع : Raisonnement par récurrence

مثال : لتكن $P(n)$ الخاصية للمتغير الصحيح الطبيعي n المعرفة كما يلي : $\quad :P(n)$ \ $2^n \geq n+1$ Z

1. أ. حدد قيمة حقيقة العبارة $P(0)$.
ب. حدد العبارة $P(n+1)$.
2. ليكن $n \in$ ã . بين أنه إذا كانت $P(n)$ صحيحة ؛ فإن $P(n+1)$ تكون صحيحة .

تصحيح :

1. أ. لدينا : $:P(0)$ \ $2^0 \geq 0+1$ Z عبارة صحيحة لأن $1 \geq 1$.
ب. لدينا : $:P(n+1)$ \ $2^{n+1} \geq (n+1)+1$ Z أي : $:P(n+1)$ \ $2^{n+1} \geq n+2$ Z .
2. ليكن $n \in$ ã . نفترض أن $P(n)$ صحيحة أي: $2^n \geq n+1$, ونثبت أن $P(n+1)$ صحيحة , أي : $2^{n+1} \geq n+2$.
لدينا : $2^n \geq n+1$. إذن $2\times 2^n \geq 2\times(n+1)$, أي : $2^{n+1} \geq 2n+2 \ :(i)$. وبما أن : $2>1 \Rightarrow 2n \geq n$ لأن $n \geq 0$, فإن : $2n+2 \geq n+2 \ :(ii)$. ومن (i) و (ii) نستنتج أن : $2^{n+1} \geq n+2$. وبالتالي فإن : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

استنتاج : لدينا : $P(0)$ عبارة صحيحة ولدينا $\forall n \in$ ã $: \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$. أي صحة العبارة $P(n)$ تستلزم صحة العبارة الموالية $P(n+1)$ ومنه فإن :

ü $P(0)$ عبارة صحيحة .
ü إذن $P(1)$ عبارة صحيحة .
ü ومنه فإن $P(2)$ عبارة صحيحة .
ü وعليه فإن $P(3)$ عبارة صحيحة ... وهكذا دواليك إلى ما لا نهاية .
ü وبالتالي فإن $P(n)$ عبارة صحيحة أيا كان n من ã .

مبدأ الترجع : Principe de récurrence

ليكن $n_0 \in$ ã . ولتكن $P(n)$ خاصية لمتغير صحيح طبيعي .إذا تحقق الشرطان التاليان :
ü $P(n_0)$ عبارة صحيحة .
ü صحة $P(n)$ تستلزم صحة العبارة الموالية $P(n+1)$ لكل $n \geq n_0$.
فإن : $P(n)$ تكون صحيحة أيا كان $n \geq n_0$.

تمرين تطبيقي : بين بالترجع أن : $\boxed{1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$: $\forall n \in$ ã* .

نضع : $:P(n)$ \ $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Z .

لدينا : $P(1)$: « $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ » عبارة صحيحة لأن : $1=1$.

ليكن $n\geq 1$. نفترض أن $P(n)$ عبارة صحيحة أي : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

ونبين أن : $P(n+1)$ عبارة صحيحة أي : $1+2+...+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. إذن :

$$1+2+...+n+(n+1)=(1+2+...+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

خلاصة الترجع : $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

تمرين تقويمي 1 : بين بالترجع أن :

i. $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ii. $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

iv. $\forall n\in \mathbb{N}:\quad 4^n\geq 1+3n$

v. $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 11\ /\ \left(3^{2n}+2^{6n-5}\right)$

vi. $\forall n\in \mathbb{N}^*:\quad 7\ /\ \left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)$

vii. $\forall n\in \mathbb{N}:\quad 3\ /\ \left(n^3-n\right)$

viii. $\forall n\in \mathbb{N}:\quad 5\ /\ \left(7^n-2^n\right)$

ix. $\forall a\in]0,+\infty[,\quad \forall n\in \mathbb{N}\quad:\quad (1+a)^n\geq 1+na$

x. نعتبر a_n العدد المكون من n رقم كلها تساوي 7 ($a_1=7$ ؛ $a_2=77$ ؛ $a_3=777$ ؛ ...)

بين أن : $\forall n\in \mathbb{N}^*\quad:\quad a_n=\dfrac{7}{9}\left(10^n-1\right)$

تمرين تقويمي 2 :

i. بين أن : $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2:\quad \left[(xy\neq 1)\wedge(x\neq y)\right]\quad\Rightarrow\quad\left[\dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}\right]$

ii. بين بالخلف أن : $\sqrt{2}\notin \mathbb{Q}$

iii. بين أن : لكل $n\in \mathbb{N}$: n زوجي يستلزم n^2 زوجي .

iv. أكتب باستعمال الروابط المنطقية ما يلي :

- A : « جميع الأعداد الحقيقية لها نفس المربع »
- B : « كل عدد حقيقي له مربع موجب »

حدد قيمة حقيقة كل من العبارتين A و B .

v. ليكن $(m,n)\in \mathbb{Z}^2$. بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية .

vi. لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقية حيث أحدها موجب قطعا والثاني منعدم و الثالث سالب قطعا وتحقق

الإستلزامات التالية :

$$(1):\quad x=0\Rightarrow y>0$$
$$(2):\quad x>0\Rightarrow y<0$$
$$(3):\quad y\neq 0\Rightarrow z>0$$

حدد من بين هذه الأعداد الموجب قطعا و السالب قطعا و المنعدم .

vii. ليكن $a\geq 1$ و $b\geq 4$. بين أن : $(a=2)\wedge(b=8)\quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{a-1}+2\sqrt{b-4}=\dfrac{a+b}{2}$