الثانوية التأهيلية وادي الذهب . تيفلت

فرض محروس رقم II
د I

2 ع ر ت - 2
2H30
23/11/13

مسألة [تتكون من الأجزاء (I) و (II) و (III)]

الجزء (I) : لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$

1 - أ) تحقق أن f تقبل دالة أصلية على $]0;+\infty[$. نسمي F دالتها الأصلية على $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1 ، (أي $F(1)=0$). ثم استنتج رتابة الدالة F. 0,5

ب) بين أن : $\forall x>1 : 0<F(x)<2\sqrt{x}$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ 1

2 - أ) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) , (\forall x>0) : F(x^n)=nF(x)$ 1

(يمكنك استعمال مشتقة الدالة : $g : x\longmapsto F(x^n)$ ....)

ب) تحقق أن : $F(2)>0$ وأن $\lim\limits_{n\to+\infty}F(2^n)=+\infty$. 0,5

ج) استنتج أن F غير مكبورة وأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. 0,5

3 - أ) بين أن : $\forall x>0 : F\left(\frac{1}{x}\right)=-F(x)$. (يمكنك اعتبار مشتقة الدالة : $h : x\longmapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$) 1

ب) بين أنه إذا كانت u دالة موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على مجال I ، 0,5

فإن ، الدالة : $\forall x\in I , \ell : x\longmapsto F(u(x))$ تكون قابلة للاشتقاق على I

ولدينا : $\forall x\in I : \ell'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

ج) استنتج دالة أصلية للدالة : $x\longmapsto\frac{1}{(1+x^2)\,\mathrm{Arctan}\,x}$ على المجال $]0;+\infty[$ 1

الجزء (II) : 1 - أ) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R} : x+\sqrt{1+x^2}>0$ 0,5

ب) بين أن الدالة العددية H للمتغير الحقيقي x بحيث : $H(x)=F\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 0,5

معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ($(\mathcal{C}_H)$ منحنى H في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$)

ج) أحسب $H'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج رتابة H على $\mathbb{R}$. 1,5

2 - أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)=+\infty$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_H)$ بجوار $+\infty$ 1

ب) بين أن الدالة H فردية . 1

ج) باستعمال متفاوتة التزايدات المنتهية بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}_+ : H(x)\leqslant x$ 1

3 - أ) بين أن المعادلة : $F(x)=1$ تقبل حلا وحيداً e في المجال $]1;+\infty[$. 0,5

ب) استنتج أن المعادلة $H(x)=1$ تقبل حلا وحيداً α في المجال $]0;+\infty[$ (حدد α بدلالة e) 0,75

ج) بين أن أصل المعلم هي نقطة انعطاف المنحنى $(\mathcal{C}_H)$. 0,5

هـ) أنشئ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ؛ المنصف الأول للمعلم و المنحنى $(\mathcal{C}_H)$ (نعطي $H(1)\simeq0,9$) 1

4 - أ) بين أن الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب : $K(x)=F(xy)$ حيث $y>0$ ثابت معين تماما 0,5

دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

ب) استنتج أن : $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^* : F(xy)=F(x)+F(y)$ 0,75

ج) اكتشف بطريقة أخرى فردية الدالة H 0,5

الجزء III : لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \forall n\geq 1 : U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n$$

1 - أ) بين أن : $\forall n\geq 1 : \quad U_n > 0$ — 0,5

ب) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ — 0,5

ج) استنتج أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وأن $\lim U_n \geq 0$ — 0,5

2 - لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $V_n = \dfrac{U_n}{n}$

أ) بين أن $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية (نحدد أساسها وحدها الأول). — 0,5

ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \ U_n = \dfrac{n}{2^n}$ — 0,5

3 - أ) بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = -\infty$ (F هي الدالة المعرفة في الجزء (I)). — 0,5

ب - بين أن : $(\forall x>0) ; (\forall y>0) : F\left(\frac{x}{y}\right) = F(x) - F(y)$ — 0,5

ج - أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(F(x) - xF(2)\right)$ — 0,5

د - استنتج أن : $\lim U_n = 0$ — 0,5

إعداد : ذ: ع عشاق

- يؤخذ بعين الاعتبار : - وضوح ودقة الانشاء الرياضي
- نظافة العمل .

- الاجزاء الثلاثة مرتبطة فيما بينها بشكل مرن حيث بإمكانك استعمال النتائج التي لم تستطع التوصل اليها !