المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة درعة

# عموميات حول الدوال العددية

2

الثانوية التأهيلية الفتح - القليعة

الأستاذ : عادل بناجي

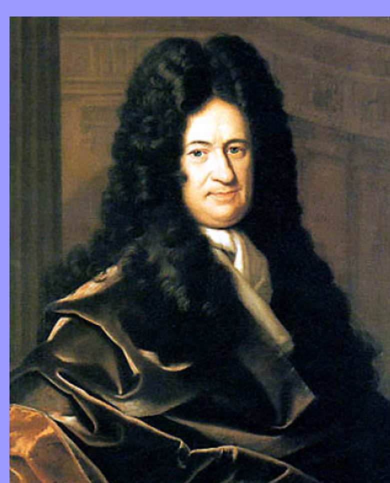
السنة الدراسية : 2015 – 2016

## 2 عموميات حول الدوال العددية

من إنجاز : الأستاذ عادل بناجي

### تقديم

تمتد البدايات الأولى لفكرة الدالة إلى العهد البابلي حيث ظهرت في الجداول العددية التي كانوا يجزونها لمقابلة العدد بمربعه أو بمقلوبه أو بجذره أو بمكعبه أو بجذره التكعيبي، كما ظهرت في جداولهم الفلكية على شكل ربط بين عدد من القيم تعبر مثلا عن الزمن و قيم أخرى تعبر عن المواضع. غير أن هذا الربط لا يرقى إلى مفهوم الربط الدّالي (من كلمة دالة) بين الكميات الذي نعرفه اليوم. ولقد كان توجه بعض الرياضيين إلى التعبير عن ظواهر طبيعية كالحرارة، الكثافة، السرعة...إلخ، بواسطة كميات عددية بداية لتبلور هذا المفهوم. فعن ظاهرة السرعة قدّم الرياضي نيكول أوراسم (1320 – 1382 م) برهانا هندسيا حول النتيجة الآتية: " في فترة زمنية معطاة، يقطع متحرك بحركة متسارعة بانتظام نفس المسافة التي يقطعها متحرك آخر بسرعة ثابتة تساوي متوسط السرعتين الأقصيين للمتحرك الأول" واستخدم في ذلك تمثيلا بيانيا كان بمثابة أولى العلاقات الدّالية التي تربط الزمن بالسرعة. ثمّ تطور التعبير عن هذه العلاقة الدّالية مع مطلع القرن السابع عشر بواسطة ما يسمى علاقة" وهذا بفضل عاملين أساسيين ومصيريين ليس فقط بالنسبة لمفهوم الدالة، ولكن أيضا بالنسبة لتقدم الرياضيات عموما، العامل الأول هو اكتشاف الترميز الحرفي في الجبر والعامل الثاني هو التصور الجديد للرياضيات كلغة تعبر عن الحقائق الفيزيائية الطبيعية الذي عبر عنه غاليليو(1564 – 1642 م) . وكان الفضل لديكارت (1596 – 1650 م) في التعبير لأول مرة عن فكرة الارتباط بين كميتين متغيرتين، أما كلمة " دالة " فقد استخدمت في الرياضيات لأوّل مرة من طرف ليبنيتز(1646 – 1716 م). ولم ينضج مفهوم الدالة إلاّ بمجيء ريمان (1826 – 1866 م) حيث قدّم دراسة نظرية شاملة لهذا المفهوم.



## المحتويات

# بطاقة تقنية رقم : 02

| | |
|---|---|
| ثانوية : الفتح التأهيلية<br>السنة الدراسية : 2015 – 2016<br>الأستاذ : عادل بناجي | المستوى : الأولى باكلوريا علوم تجريبية<br>درس : عموميات حول الدوال العددية<br>التذبير الزمني : 9 ساعات |

| | |
|---|---|
| فقرات الدرس | 1 الدالة المكبورة - المصغورة - المحدودة / مطارف دالة<br>2 مقارنة دالتين و التأويل الهندسي<br>3 صورة مجال بدالة عددية<br>4 تركيب دالتين<br>5 رتابة الدوال $f+\lambda$ و $\lambda f$ و $g\circ f$<br>6 التمثيل المبياني للدالتين $x\mapsto\sqrt{x+a}$ و $x\mapsto ax^3$ |
| المكتسبات القبلية | • الدالة الخطية و التالفية - الدالة الحدودية و الدالة المتخاطة -الشلجم والهذلول<br>• مجموعة تعريف دالة عددية - مطارف دالة عددية - رتابة دالة عددية |
| الكفاءات المستهدفة | • مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات ؛<br>• استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوية و الدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها ؛<br>• التعرف على تغيرات دالة من الشكل $f+\lambda$ و $\lambda f$ انطلاقا من تغيرات الدالة f ؛<br>• استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال و لحل بعض المعادلات و المتراجحات ؛<br>• تحديد تغيرات $g\circ f$ انطلاقا من تغيرات $g$ و $f$ ؛ |
| التوجيهات التربوية | • ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني . كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات .<br>• ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع : $f(x)=c$ و $f(x)\leqslant c$ و $f(x)\leqslant g(x)$ و $f(x)=g(x)$ و $f(x)<g(x)$<br>• يمكن في حدود الإمكان ، استعمال الالات الحاسبة والبرانم المعلوماتية التي تمكن من دراسة الدوال .<br>• يستحسن معالجة وضعيات مختارة تنطلق من ميادين أخرى . |
| التقنيات البيداغوجية المعتمدة | النقاش -العرض - التمارين -البحث - العمل الجماعي ؛ |

## الأهداف البيداغوجية

| | |
|---|---|
| 1 تحديد حيز تعريف دالة عددية | 6 دراسة حدودية من الدرجة الثانية |
| 2 دراسة زوجية دالة | 7 دراسة دالة متخاطة |
| 3 دراسة رتابة دالة عددية | 8 دراسة الدالة $x \mapsto ax^3$ |
| 4 مقارنة دالتين على مجال | 9 دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{x+a}$ |
| 5 تحديد مطارف دالة عددية | 10 دراسة مركب دالتين |

## الكفايات المستهدفة

| الكفايات النوعية | الكفايات المستعرضة |
|---|---|
| • دراسة وتمثيل الدوال العددية<br>• تطبيقات في الشتقاق و التكامل<br>• استغلال خصائص الدوال العددية في حل مسائل رياضية متنوعة ... | • استعمال الدوال وتطبيقاتها في مختلف المواد الفيزيائية والاقتصادية والبيولوجية و الإحصائية ...<br>• تطبيق الدوال في حل مسائل يومية<br>• كفايات أخرى ذات بعد منهجي (حل المسائل ، البرهنة ...) ، نقذي ، تواصلي و إبداعي<br>• استثمار الأدات المعلوماتية كوظيفة منهجية |

## التقويم

| | | |
|---|---|---|
| كيف ؟ | ☒ فردي ☒ جماعي<br>☒ تكويني ☒ اجمالي<br>☒ تشخيصي ☒ تقويم ذاتي<br>⊡اخر ... | **التقويم المنتظر :**<br>• تقويم تشخيصي عبر أنشطة تذكيرية و تمهيدية متنوعة تخلل الفقرة الأولى من الدرس<br>• تقويم تكويني بعد انتهاء كل نشاط ، يقيس مدى استيعاب التلاميذ للمكتسبات الجديدة ويعالج الاعوجاجات ويعيد توجيه التعلمات ، وذلك من خلال أمثلة وتمارين تطبيقية متنوعة |
| متى ؟ | خلال الدرس و في حصص التمارين | |
| من طرف من ؟ | الأستاذ - المتعلم | |

## الموارد المستخدمة

| موارد الأنترنيت : | **الوسائل التعليمية المستخدمة :**<br>السبورة + طباشير أبيض + طباشير ملون + الأدوات الهندسية |
|---|---|

**المراجع المعتمدة :**
التوجيهات التربوية و البرامج الخاصة بتدريس مادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي+ الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات

**دعامة ورقية:**
الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات (الأولى بكالوريا علوم تجريبية) + سلسلة التمارين + سلسلة الأنشطة + وثيقة الدرس

**دعامة رقمية:**

## كيفية الاشتغال

| نوع الأنشطة | مكان الأنشطة | كيفية الاشتغال |
|---|---|---|
| ☒في القسم<br>⊡في المنزل<br>⊡اخر ... | ☒قاعة الدرس<br>⊡قاعة الإعلاميات<br>⊡اخر ... | ☒عمل فردي<br>☒عمل جماعي<br>⊡اخر ... |

## 1 أنشطة التذكير

**نشاط**

...

**1** حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

أ. $f(x)=x^2-3x+6$

ب. $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+3}$

ج. $f(x)=\sqrt{x+1}$

د. $g(t)=\dfrac{4}{6-t}-\dfrac{1}{t}$

هـ. $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}+\dfrac{1}{t-1}$

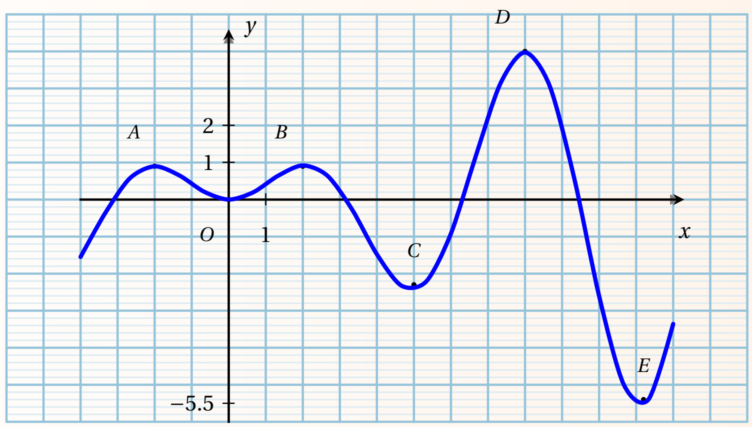
و. $k(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$

ز. $m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}$

**2** مثل مبيانيا الدوال : $f(x)=x^2+2x+1$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

**نشاط**

الشكل أسفله هو تمثيل مبياني لدالة عددية $f$ على المجال $[-4,12]$ في معلم متعامد ممنظم $o,\vec{i},\vec{j}$ .




اعتمادا على الشكل أعلاه ، أجب عن الأسئلة التالية :

**1** حدد أزواج احداثيات النقط $A$ ، $O$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $E$

**2** ماذا تمثل هذه النقط بالنسبة للدالة $f$

**3** أتمم ملء الفراغ بالرمز المناسب : "$\geqslant$" أو "$\leqslant$"

أ. $\forall x\in[-4,12]:\quad f(x)....5$

ب. $\forall x\in[-4,12]:\quad -6....f(x)$

ج. $\forall x\in[-4,12]:\quad -6....f(x)....5$

**4** حدد زوجية الدالة $f$ على المجال $[-4,4]$

**5** ضع جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $[-4,12]$

**6** حل مبيانيا المعادلات : $f(x)=0$ ، $f(x)=1$ ، $f(x)=5$ و $f(x)=-6$

**7** حل مبيانيا المتراجحتين : $f(x)>1$ و $f(x)-1\leqslant 0$

**8** أكتب على شكل مجال المجموعة $I=\{f(x)/x\in[0,3]\}$

**9** حدد مبيانيا : $f([-4,3])$ و $f([3,10])$ و $f([-4,12])$

### الدالة العددية

نسمي دالة عددية لمتغير حقيقي كل علاقة $f$ (أو $g$ أو ...) تربط كل عدد حقيقي $x$ بعدد حقيقي وحيد على الأكثر يسمى صورة $x$ بالدالة $f$ ويرمز له ب $f(x)$

### مجموعة تعريف دالة

مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة $f$ تسمى مجموعة تعريف الدالة $f$ ويرمز لها ب $D_f$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

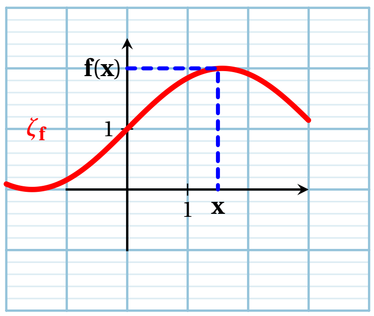
أمثلة لمجموعة تعريف دالة حيث $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = P(x)$ <br> $D_f = \mathbb{R}$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ <br> $D_f = \mathbb{R}^*$ | $f(x) = \sqrt{x}$ <br> $D_f = \mathbb{R}^+$ | $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ <br> $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$ |
| $f(x) = \sqrt{P(x)}$ <br> $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$ | $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ <br> $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$ | $f(x) = sin(x) \quad D_f = \mathbb{R}$ <br> $g(x) = cos(x) \quad D_g = \mathbb{R}$ | $f(x) = tan(x)$ <br> $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ |

### التمثيل المبياني لدالة

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

المجموعة $\zeta_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$ تسمى التمثيل المبياني للدالة $f$




### تساوي دالتين

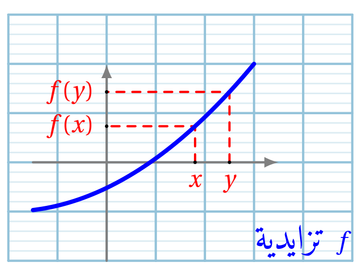
$f$ و $g$ دالتان متساويتان يكافئ

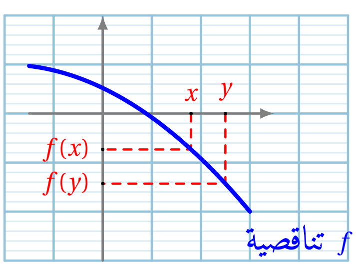
$$\begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \quad ; \quad (\forall x \in D_f) \end{cases}$$

### تغيرات دالة عددية

لتكن $f$ دالة عددية و $I$ مجال ضمن $D_f$ و $x$ و $y$ عنصرين من $I$

- $f$ تزايدية على $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in I^2 : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- $f$ تزايدية قطعا على $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in I^2 : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- $f$ تناقصية على $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in I^2 : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- $f$ تناقصية قطعا على $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in I^2 : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$



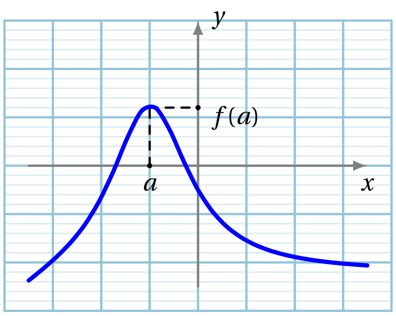

لتكن $f$ دالة عددية و $I$ مجال ضمن $D_f$ و $x$ و $y$ عنصرين من $I$ بحيث $x \neq y$ العدد $T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ يسمى معدل تغير الدالة $f$ بين $x$ و $y$

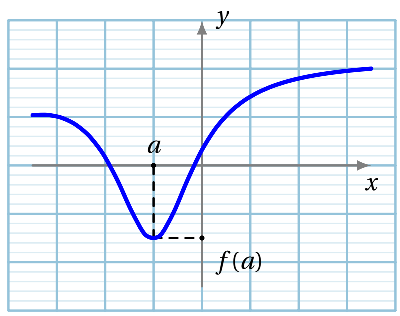
- $f$ تناقصية على $I$ $\Leftrightarrow$ $T(x, y) \leq 0$
- $f$ تزايدية على $I$ $\Leftrightarrow$ $T(x, y) \geq 0$
- $f$ تناقصية قطعا على $I$ $\Leftrightarrow$ $T(x, y) < 0$
- $f$ تزايدية قطعا على $I$ $\Leftrightarrow$ $T(x, y) > 0$

<table>
<tr>
<td>

• $f(a)$ قيمة قصوى للدالة $f$ على $I$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x\in I): f(x)\leqslant f(a)$

• $f(a)$ قيمة دنيا للدالة $f$ على $I$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x\in I): f(a)\leqslant f(x)$



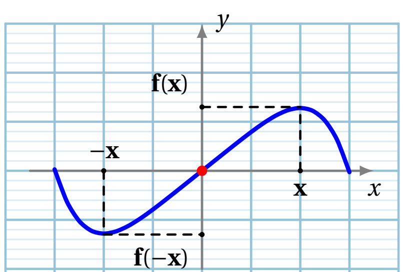



</td>
<td>مطارف دالة عددية</td>
</tr>
<tr>
<td>

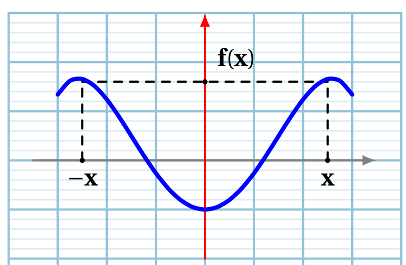
المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

• $f$ زوجية $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(\forall x\in D_f) & :-x\in D_f\\ \forall x\in D_f) & :f(x)=f(-x)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\zeta_f$ متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

• $f$ فردية $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(\forall x\in D_f) & :-x\in D_f\\ \forall x\in D_f) & :f(x)=-f(x)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\zeta_f$ متماثل بالنسبة لأصل المعلم

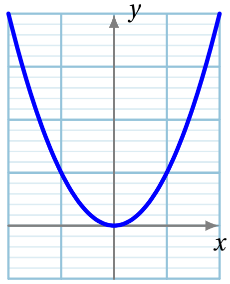
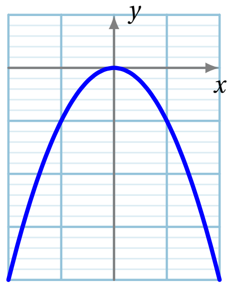
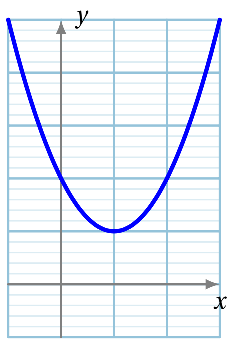
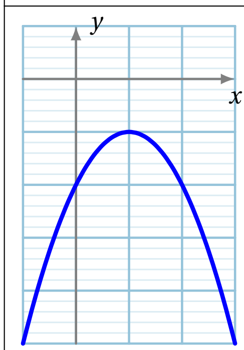


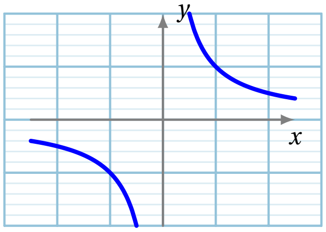
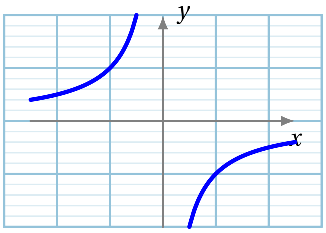
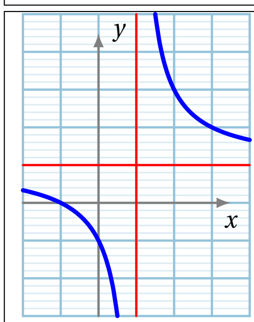
دالة فردية



دالة زوجية

</td>
<td>زوجية دالة عددية</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>الدالة العددية</th><th>الحالة</th><th>جدول التغيرات</th><th>التمثيل المبياني</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=ax^2$<br>حيث : $a\neq 0$<br>$D_f=\mathbb{R}$</td><td>$a>0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f(x) & .. & & & & .. \\ & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & 0 & & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f(x) & & & 0 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & .. & & & & .. \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=$<br>$ax^2+bx+c$<br>حيث : $a\neq 0$<br>$D_f=\mathbb{R}$</td><td>$a>0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & .. & & & & .. \\ & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & f(-\frac{b}{2a}) & & \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & & f(-\frac{b}{2a}) & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & .. & & & & .. \end{array}$</td><td></td></tr>
</table>

| الدالة العددية | الحالة | جدول التغيرات | التمثيل المبياني |
|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{a}{x}$ حيث : <br> $a\neq 0$ <br> $D_f=\mathbb{R}^*$ <br> $f$ فردية | $a>0$ | $x$: $-\infty$ ... $0$ ... $+\infty$ <br> $f(x)$: .. $\searrow$ .. ‖ .. $\searrow$ .. |  |
| | $a<0$ | $x$: $-\infty$ ... $0$ ... $+\infty$ <br> $f(x)$: .. $\nearrow$ .. ‖ .. $\nearrow$ .. |  |
| $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ <br> $c\neq 0$ : حيث <br> و <br> $(a,b)\neq(0,0)$ <br> $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ | $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}<0$ | $x$: $-\infty$ ... $-\frac{d}{c}$ ... $+\infty$ <br> $f(x)$: .. $\searrow$ .. ‖ .. $\searrow$ .. |  |
| | $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}>0$ | $x$: $-\infty$ ... $-\frac{d}{c}$ ... $+\infty$ <br> $f(x)$: .. $\nearrow$ .. ‖ .. $\nearrow$ .. |  |

## 2 الدالة المكبورة - الدالة المصغورة - الدالة المحدودة

### نشاط

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

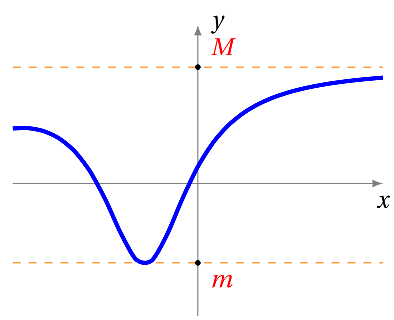
1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2. بين أن $f(x)<2$ لكل $x$ من $D_f$
3. بين أن $f(x)\geqslant 1$ لكل $x$ من $D_f$
4. استنتج أن $1\leqslant f(x)<2$ لكل $x$ من $D_f$

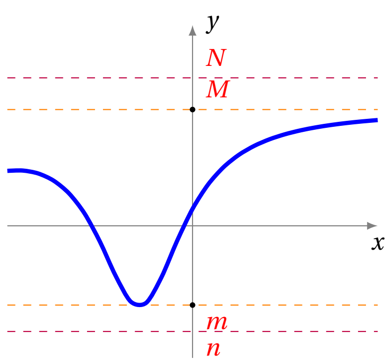
### تعريف

لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $\mathscr{D}_f$ .

1. نقول إن $f$ **مكبورة** على $\mathscr{D}_f$ إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث : $\forall x\in\mathscr{D}_f, f(x)\leq M$
2. نقول إن $f$ **مصغورة** على $\mathscr{D}_f$ إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث : $\forall x\in\mathscr{D}_f, f(x)\geq M$
3. نقول إن $f$ **محدودة** على $\mathscr{D}_f$ إذا كانت مكبورة ومصغورة ، أي إذا وجد عددين حقيقيين $M$ و $m$

بحيث : $\forall x\in\mathscr{D}_f, m\leq f(x)\leq M$




### خاصية

- إذا كانت $f$ مكبورة بعدد حقيقي $M$ فإنها مكبورة بكل عدد حقيقي $N$ بحيث : $N\geq M$
- إذا كانت $f$ مصغورة بعدد حقيقي $m$ فإنها مصغورة بكل عدد حقيقي $n$ بحيث : $n\leq m$

### تمرين تطبيقي

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

**1** بين أن $f$ مكبورة ب $1$ على $\mathbb{R}$

**2** بين أن $f$ مصغورة ب $0$ على $\mathbb{R}$

**3** استنتج أن $f$ محدودة على $\mathbb{R}$

### خاصية

تكون $f$ محدودة على $\mathscr{D}_f$ إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي $c>0$ بحيث : $|f(x)|\leq c$ لكل $x$ من $\mathscr{D}_f$

(أو $|f(x)|<c$ لكل $x$ من $\mathscr{D}_f$ )

### تمرين تطبيقي

بين أن الدوال التالية محدودة على $\mathbb{R}$ : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ ؛ $f(x)=\dfrac{x sin(x)}{x^2+1}$ ؛ $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

## 3 الدالة الدورية

### نشاط

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=cos(x)$

لدينا : لكل $x$ من $\mathbb{R}$ $\begin{cases}(x+2\pi)\in\mathbb{R}\\ f(x+2\pi)=f(x)\end{cases}$ . نقول إن $f$ دالة دورية ودورها $T=2\pi$

**1** هل الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=sin(x)$ دورية ؟ ما دورها ؟

**2** بين أن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ بما يلي : $h(x)=tan(x)$ دورية دورها $T=\dfrac{\pi}{2}$

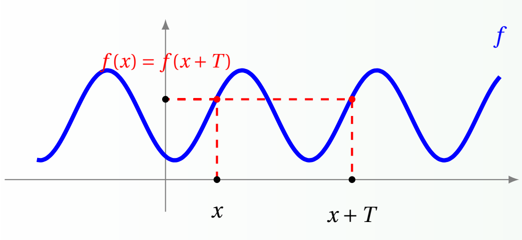
### تعريف

لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $\mathscr{D}_f$ .

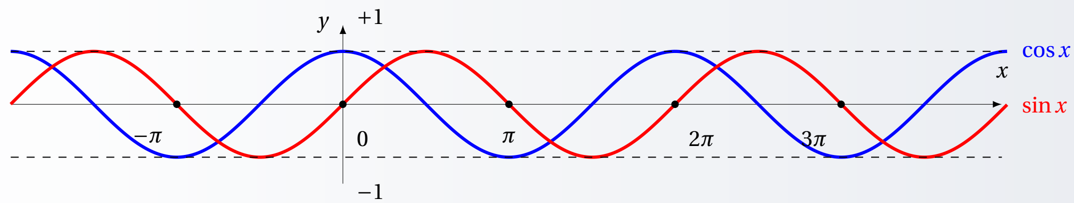
نقول أن $f$ **دورية** إذا وجد عدد حقيقي $\mathscr{T}$ موجب قطعا بحيث:

**1** لكل $x$ من $D_f$, $(x+\mathscr{T})\in\mathscr{D}_f$

**2** لكل $x$ من $D_f$ لدينا : $f(x+\mathscr{T})=f(x)$



**مثال**




**خاصية**

إذا كان $T$ دورا للدالة $f$ فإن لكل $k$ من $\mathbb{Z}$ لدينا : $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x+kT)=f(x)$

## 4 مقارنة دالتين

**نشاط**

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بمايلي : $f(x)=-x^2+2x-3$ و $g(x)=x^2+3x+4$

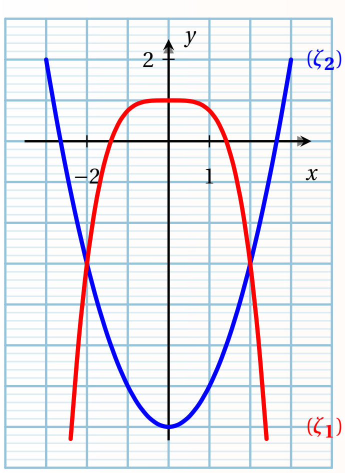
1. تحقق أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)=-(x-1)^2-2$ واستنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}); f(x)<0$
2. بين أن لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g(x)\geqslant 0$
3. أدرس اشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$

**نشاط**

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $o,\vec{i},\vec{j}$ .

يتضمن الشكل المقابل التمثيلين المبيلنيين $(\zeta_f)$ و $(\zeta_g)$ للدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+1$ و $g(x)=x^2-7$



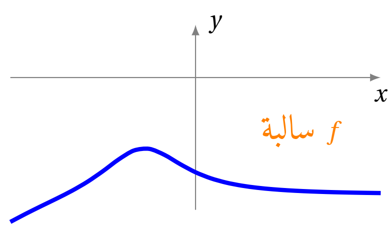

1. حدد التمثيل المياني الموافق لكل دالة
2. ا. حل مبيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$

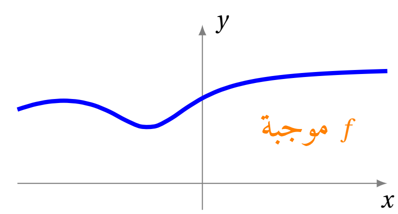
   ب. أدرس الوضع النسبي ل $(\zeta_f)$ و $(\zeta_g)$
3. حل المتراجحة $f(x)<g(x)$

## تعريف

لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ .

1. نقول أن $f$ دالة **موجبة** إذا كان : $\forall x \in D_f, f(x) \geq 0$
2. نقول أن $f$ دالة **سالبة** إذا كان : $\forall x \in D_f, f(x) \leq 0$




## تعريف

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة $D$ .

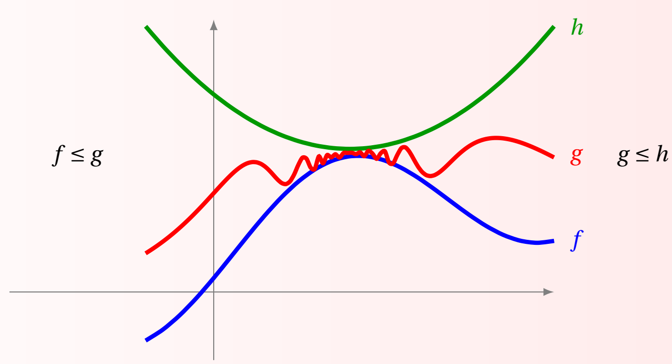
1. نقول أن $f$ أصغر من أو تساوي $g$ على $D$ إذا كان: $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$ و نكتب ($f \leq g$ على $D$)
2. نقول أن $f$ أكبر من أو تساوي $g$ على $D$ إذا كان: $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$ و نكتب ($f \geq g$ على $D$)

## ملاحظة

تكون $f \leq g$ على $D$ إذا و فقط إذا كان : $f - g \leq 0$ على $D$

## خاصية

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة $D$ . و ليكن $C_f$ و $C_g$ منحناهما في معلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$ تكون $f \leq g$ على $D$ إذا و فقط إذا كان : المنحنى $C_f$ **يوجد تحت** المنحنى $C_g$



**تمرين تطبيقي**

قارن الدالتين $f$ و $g$ في الحالات التالية :

**1** $f(x)=x^2$ و $g(x)=4x-1$

**2** $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

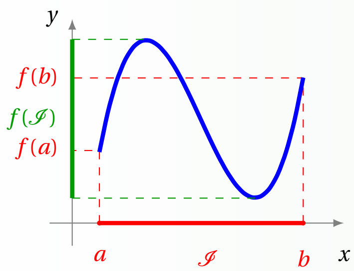
**3** $f(x)=x+1$ و $g(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

## 5 صورة مجال بدالة عددية

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $\mathscr{D}_f$ و $\mathscr{I}$ مجال ضمن $\mathscr{D}_f$ ($\mathscr{I}\subset\mathscr{D}_f$) صورة المجال $\mathscr{I}$ بالدالة $f$ هي المجموعة المكونة من جميع صور العناصر التي تنتمي إلى $\mathscr{I}$ أي :

$f(\mathscr{I})=\{f(x)\backslash x\in\mathscr{I}\}$




## 6 مركب دالتين عدديتين

**نشاط**

$f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين ب : $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-x+5$

**1** **ا.** أحسب $g(1)$ ثم استنتج قيمة $f(g(1))$

**ب.** أحسب $g(-4)$ ثم استنتج قيمة $f(g(-4))$

**ج.** أحسب $g(8)$ هل يمكن حساب قيمة $f(g(8))$ ؟

**2** **ا.** حدد مجال $I$ بحيث لكل $x$ من $I$ يمكن حساب $f(g(x))$

**ب.** حدد تعبير $f(g(x))$ لكل $x$ من $I$

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathscr{D}$ و $g$ دالع عددية معرفة على $\mathscr{D}'$ بحيث لكل $x$ من $\mathscr{D}$ لدينا $f(x)\in\mathscr{D}'$

مركب الدالتين $f$ و $g$ في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها ب : $g\circ f$ بحيث لكل $x$ من $\mathscr{D}$ ، $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

**ملاحظة**

مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي : $\mathcal{D}_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/ x\in\mathcal{D}_f, f(x)\in\mathcal{D}_g\}$

**تطبيقي تمرين**

...

1 نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي : $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ . حدد مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$

2 نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي : $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=2x-1$ . حدد $g\circ f$ و $f\circ g$ ثم قارنهما

3 نعتبر الدالتين $f$ و $h$ المعرفتين بمايلي : $f(x)=2x-1$ و $h(x)=2x^2+3x+1$ . حدد دالة $g$ بحيث : $h=g\circ f$

# 7 رتابة دالة عددية

## 1.7 رتابة الدالة $f+k$ حيث $(k\in R)$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathcal{I}$ و $k$ عددا حقيقيا ثابثا . الدالتان $f$ و $f+k$ **لهما نفس منحى التغيرات**

## 2.7 رتابة الدالة $kf$ حيث $(k\in R^\star)$

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathcal{I}$ و $k$ عددا حقيقيا ثابثا .
- إذا كان $k>0$ فإن الدالتين $f$ و $kf$ **لهما نفس منحى التغيرات** .
- إذا كان $k<0$ فإن الدالتين $f$ و $kf$ **لهما منحى تغيرات مختلف** .

## 3.7 رتابة مركب دالتين

**خاصية**

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ مجالين ضمن $\mathcal{D}_f$ و $\mathcal{D}_g$ على التوالي حيث $f(\mathcal{I})\subset\mathcal{J}$

- إذا كان ل $f$ و $g$ نفس الرتابة على التوالي على المجالين $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$فإن $g\circ f$ **تزايدية** على $\mathcal{I}$
- إذا كان ل $f$ و $g$ رتابة مختلفة على التوالي على المجالين $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$فإن $g\circ f$ **تناقصية** على $\mathcal{I}$

**ملاحظة**

لتحديد تغيرات $g\circ f$ على المجال $\mathcal{I}$ نتبع الخطوات التالية :

1. تحديد رتابة الدالة $f$ على $\mathcal{I}$
2. تحديد إذا أمكن $f(\mathcal{I})$ أو على الأقل تحديد المجال $\mathcal{J}$ بحيث $f(\mathcal{I})\subset\mathcal{J}$
3. تحديد رتابة $g$ على $\mathcal{J}$
4. تطبيق الخاصية السابقة

**تمرين تطبيقي**

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي : $1-f(x)=3x$ و $g(x)=x^2+1$ .
باستعمال تغيرات الدالتين $f$ و $g$ استنتج تغيرات الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

# 8 التمثيل المبياني لبعض الدوال المرجعية

## 1.8 الدالة $x\mapsto\sqrt{a+x}$ حيث $x\in R$

**خاصية**

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي : $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$
و $C_f$ و $C_g$ منحنيهما في م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$

1.
   - أ. حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين $f$ و $g$
   - ب. أدرس تغيرات كل من $f$ و $g$
   - ج. أنقل الجدولين التاليين على دفترك ثم اتمم ملأهما

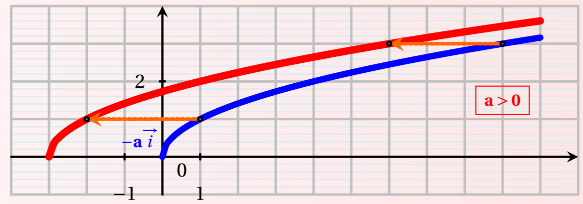
| $x$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 2 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

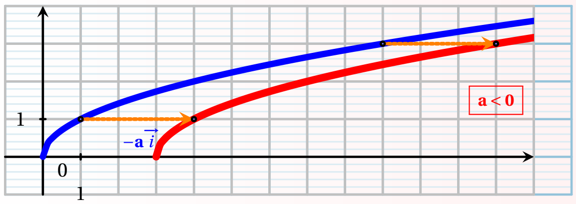
| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | |

   - د. مستعينا بالجدولين التاليين أنشىء المنحنيين $C_f$ و $C_g$
2. ليكن $x$ عنصرا من المجال $]-2,+\infty[$ .
نعتبر النقطتين $M(x+2,g(x+2))$ و $M'(x,f(x))$
   - ا. بين أن : $\overrightarrow{MM'}=-2\vec{i}$
   - ب. استنتج أن المنحنى $C_g$ هو صورة المنحنى $C_f$ بالإزاحة ذات المتجهة $-2\vec{i}$

**خاصية**

- الدالة $x \mapsto \sqrt{a+x}$ حيث $x \in R$ معرفة و **تزايدية قطعا** على $[-a,+\infty[$
- منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt{a+x}$ حيث $x \in R$ يستنتج من منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u} = -a\vec{i}$




## 2.8 الدالة $x \mapsto ax^3$ حيث $a \in R^*$

**نشاط**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 2x^3$

**1** أ. أدرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$

ب. بين أن الدالة $f$ فردية ثم ضع جدول تغيراتها

ج. أنقل الجدول التالي في دفترك ، ثم املأه

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

د. مستعينا بالجدول السابق أنشئ المنحنى $C_g$ في م.م.م $(o, \vec{i}, \vec{j})$

**2** مثل مبيانيا منحنى الدالة $g(x) = -2x^3$

**خاصية**

ليكن $x$ عنصر من $\mathbb{R}^*$

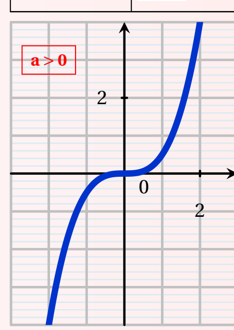
- الدالة $x \mapsto x^3$ **تزايدية قطعا** على $R$ إذا كان $a > 0$
- الدالة $x \mapsto x^3$ **تناقصية قطعا** على $R$ إذا كان $a < 0$

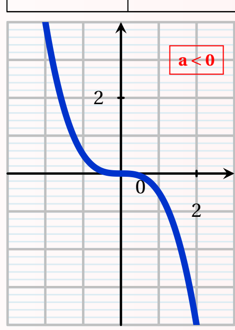
**a > 0**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**a < 0**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |



## جدول بعض الأخطاء الشائعة

| الخطأ أو الصعوبة | مصدر الخطأ | سببه | بعض سبل المعالجة |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

# ∾ سلسلة تمارين درس : عموميات حول الدوال العددية ∾

### التمرين 01

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف $f$ وتحقق أن $f$ دالة فردية
2. بين أن الدالة $f$ مصغورة بالعدد 3 على المجال $]1,+\infty[$
3. استنتج أن الدالة $f$ مكبورة بالعدد $-3$ على المجال $]-\infty,-1[$

### التمرين 02

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي :

$f(x)=x-2\sqrt{x}+3$

1. تحقق أن $f(x)=(\sqrt{x}-1)^2+2$ لكل $x$ من $\mathbb{R}^+$
2. استنتج القيمة الدنيا المطلقة للدالة $f$

### التمرين 03

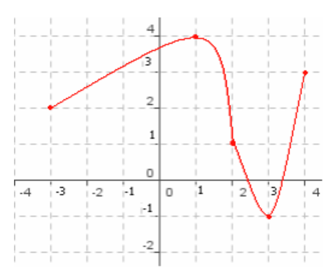
نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بجدول تغيراتها كالتالي :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $3$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ |

1. حدد مطارف الدالة $f$
2. قارن $f(1)$ و $f(2)$
3. حدد $f([-1,0])$ ؛ $f([-1,4])$ ؛ $f([0,4])$

### التمرين 04

الشكل أسفله يمثل منحنى الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-3,4]$




1. حدد مطارف الدالة $f$
2. حدد : $f([-3,1])$ ؛ $f([-3,2])$ ؛ $f([2,4])$ ؛ $f([3,4])$
3. حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$

### التمرين 04

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $[-1,+\infty[$ بمايلي :

$f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=1+\dfrac{x}{2}$

1. بين أن $f(x)\geqslant 0$ و $g(x)\geqslant 0$ لكل $x$ من $[-1,+\infty[$
2. أحسب ثم قارن $(f(x))^2$ و $(g(x))^2$ لكل $x$ من $[-1,+\infty[$
3. استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ على المجال $[-1,+\infty[$
4. أنشئ منحنى كل من الدالتين $f$ و $g$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

### التمرين 05

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي :

$f(x)=x^2(x^2+2)$ و $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2}$

حدد الوضع النسبي للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ على التوالي منحنيي الدالتين $f$ و $g$

### التمرين 06

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x)=2x+\dfrac{1}{8x}$

1. حدد $D_f$ مجموعة تعريف $f$ وتحقق أن $f$ دالة فردية
2. أ. بين أنه لكل عنصرين مختلفين $a$ و $b$ من $\mathbb{R}^*$ لدينا $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{16ab-1}{8ab}$

   ب. حدد رتابة الدالة $f$ على كل المجالين التاليين : $\left]\dfrac{1}{4},+\infty\right[$ و $\left]0,\dfrac{1}{4}\right]$

**ج.** اعط جدول تغيرات الدالة $f$ ثم حدد مطارفها

## ✌ التمرين 07 ✌

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي :

$g(x)=\sqrt{x-1}$ و $f(x)=-x^2+2x+1$

وليكن $(C_f)$ و $(C_g)$ منحنيهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

**1** تحقق من أن $(C_f)$ و $(C_g)$ يتقاطعان في النقطة $A(2,1)$

**2** اعط جدول تغيرات كل من $f$ و $g$

**3** أنشئ $(C_f)$ و $(C_g)$

**4** حل مبيانيا المتراجحة : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1}<0$

**5** حدد مبيانيا صورة المجالين $[0,1]$ ؛ $[1,2]$ بالدالة $f$

**6** نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة بمايلي : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

**ا.** حدد $D_h$ مجموعة تعريف $h$

**ب.** تحقق أن : $(\forall x\in D_h)h(x)=g\circ f(x)$

**ج.** أدرس تغيرات الدالة $h$ على المجالين $[0,1]$ و $[1,2]$

## ✌ التمرين 08 ✌

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي : $f(x)=2x^3$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

**1** اعط جدول تغيرات كل من $f$ و $g$

**2** أنشئ $(C_f)$ و $(C_g)$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

**3** نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة بمايلي : $h(x)=\dfrac{2x^3}{2x^3+2}$

**ا.** تحقق أن : $(\forall x\in\mathbb{R}--1 h(x)=g\circ f(x)$

**ب.** بين أن $h$ تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$

## ✌ التمرين 09 ✌

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بمايلي :

$g(x)=x\sqrt{x}$ و $f(x)=x^2-2x+2$

**1** حدد $D_g$ مجموعة تعريف $g$

**2** بين أن $g$ تزايدية قطعا على $D_g$

**3** استنتج أن لكل $x$ من $[0,1]$ لدينا : $g(x)\in[0,1]$

**4** اعط جدول تغيرات الدالة $f$

**5** نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي :

$h(x)=x^3-2x\sqrt{x}+2$

**ا.** تحقق أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)h(x)=f\circ g(x)$

**ب.** أدرس رتابة الدالة $h$ على المجالين $[0,1]$ و $]1,+\infty[$

## ✌ التمرين 10 ✌

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+sin^2(x)}$

**1** $D_f$ مجموعة تعريف $f$ وتحقق أن $f$ دالة زوجية

**2** بين أن $f$ دورية دورها $\pi$

**3** باستعمال التعريف ، حدد تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

**4** استنتج تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$

## ✌ التمرين 11 ✌

يرمي محمد سهما في الهواء بسرعة بدئية قدرها $20m/s$

نعلم أن الارتفاع $h$ للسهم بعد المدة الزمنية $t$ هو :

$h(t)=-5t^2+20t$

**1** أحسب ارتفاع السهم بعد مرور :

**ا.** ثانية واحدة

**ب.** ثلاث ثواني

**ج.** أربع ثواني

**2** لماذا يمكن الإقتصار في الدراسة على المجال $[0,4]$ ؟

**3** **ا.** بين أن $h$ تزايدية على $[0,2]$ وتناقصية على $[2,4]$ .

اعط جدول تغيرات الدالة $h$ على المجال $[0,4]$

**ب.** ما هو الارتفاع القصوي الذي يصله السهم ؟

**4** أرسم المنحنى الممثل للدالة $h$ في م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$