التمرين الأول

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$؛ النقط $A(0,3,1)$ و $B(-1,3,0)$ و $C(0;5;0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$.

1 . أ- لنبين أن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

لدينا : $\overrightarrow{AC}(0,2,-1)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\-1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(0+2)\vec{i}-(1-0)\vec{j}+(-2-0)\vec{k}$$
$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

إذن : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}}$

*** الاستنتاج :**

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

بما أن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\neq\vec{0}$

فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;-1;-2)$ منظمية على المستوى (ABC)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0 \qquad \left(\ \overrightarrow{OM}(x,y,z)\ \right)$$
$$\Leftrightarrow x\times2+(y-3)\times(-1)+(z-1)\times(-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y+3-2z+2=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-2z+5=0$$

إذن : $\boxed{(ABC)\ :\ 2x-y-2z+5=0}$

طريقة 2

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;-1;-2)$ منظمية على المستوى (ABC) ؛ فإن له معادلة ديكارتية على الشكل : $2x-y-2z+d=0$

ولدينا :
$$C(0,5,0)\in(ABC)\Leftrightarrow 2x_C-y_C-2z_C+d=0$$
$$\Leftrightarrow 0-5+0+d=0$$
$$\Leftrightarrow d=5$$

إذن : $\boxed{(ABC)\ :\ 2x-y-2z+5=0}$

2 . أ- تحديد مركز وشعاع الفلكة (S) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$$M\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-5=0$$
$$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y-0)^2+(z-0)^2-5=0$$
$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2$$

إذن : مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2;0;0)$ وشعاعها $R=3$

ب- لنبين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

*** حساب المسافة $d(\Omega;(ABC))$**

لدينا :
$$d(\Omega;(ABC))=\frac{|2x_\Omega-y_\Omega-2z_\Omega+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$
$$=\frac{|4-0-0+5|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

إذن : $d(\Omega;(ABC))=3$

بما أن : $d(\Omega;(ABC))=3=R$ (R شعاع الفلكة (S))

فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

ج- تحديد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) يعني H هي المسقط العمودي لـΩ

إذن H هي نقطة تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (Δ) العمودي عليه والمار من Ω

*** تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)**

(Δ) عمودي على (ABC) يعني (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n}_{(ABC)}(2,-1,-2)$ ومار من $\Omega(2;0;0)$

إذن النظمة :

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-t\\ z=-2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$
هي تمثيلا بارامتري لـ(Δ)

$$H\in(\Delta)\cap(ABC)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R};\begin{cases}x=2+2t\\ y=-t\\ z=-2t\\ 2x-y-2z+5=0\end{cases}$$

ومنه $2(2+2t)-(-t)-(-2t)+5=0$

يعني : $9t+9=0$

يعني : $t=-1$

إذن : $H(0;1;2)$ (نعوض قيمة t في النظمة أعلاه)

التمرين الثاني

1. نحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

لدينا :
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4.a.c\\ &=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\\ &=2-8=-6<0\end{aligned}$$

إذن للمعادلة حليين عقديين مترافقين هما :
$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2.a}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$z_2=\overline{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

إذن :
$$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$$

2. نعتبر العدد العقدي : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

أ ـ ♦ تحديد معيار العدد u
$$|u|=\sqrt{u\overline{u}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$$

♦ تحديد عمدة العدد u

لدينا : $|u|=\sqrt{2}$ إذن يوجد عدد حقيقي θ بحيث :
$$\begin{cases}Cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\ Sin(\theta)=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

يعني أن :
$$\begin{cases}Cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ Sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

وحيث أن :
$$\begin{cases}Cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ Sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$
فإن :
$$\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

أو : لدينا:
$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+iSin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

إذن : $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب-لنبين أن : u^6 عدد حقيقي :

➤ تذكير : إذا كان $z=r(Cos\alpha+iSin\alpha)$ فإن : $z^n=r^n(Cosn\alpha+iSinn\alpha)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

لدينا : $|u|=\sqrt{2}$ و $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن : $u=\sqrt{2}\left(Cos\frac{\pi}{3}+iSin\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه
$$\begin{aligned}u^6&=\left(\sqrt{2}\right)^6\left(Cos6.\frac{\pi}{3}+iSin6.\frac{\pi}{3}\right)\\&=8(Cos2\pi+iSin2\pi)\\&=8(1+i\times 0)=8\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

3. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$؛ نعتبر النقطتين: A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=4+-4i\sqrt{3}$ و $b=8$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ ـ لنعبر عن z' بدلالة z .

تذكير : إذا كان z عدد عقدي غير منعدم بحيث $|z|=r$ و $\arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$

فإن : $z=re^{i\alpha}$

$$R(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}OM=OM'\\(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$ (تعريف الدوران)

ومنه : $\begin{cases}\frac{OM'}{OM}=1\\(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases}\left|\frac{z_{M'}-z_O}{z_M-z_O}\right|=1\\\arg\left(\frac{z_{M'}-z_O}{z_M-z_O}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

يعني أن : $\frac{z_{M'}-z_O}{z_M-z_O}=1.e^{\frac{\pi}{3}i}$ أي : $\frac{z'-0}{z-0}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

إذن : $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z$

ب-➤ لنتحقق أن B هي صورة A بالدوران R

لدينا : $\left(4-4i\sqrt{3}\right)\left(Cos\frac{\pi}{3}+iSin\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}i}z_A$.

$$=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(4-4i\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{4}{2}\cancel{-i\frac{4\sqrt{3}}{2}}+\cancel{i\frac{4\sqrt{3}}{2}}-i^2\frac{4\sqrt{3}^2}{2}$$

$$=2+6=8=z_B$$

إذن : $b=e^{\frac{\pi}{3}i}a$

وبالتالي B هي صورة A بالدوران R

➤ **طبيعة المثلث OAB** .

لدينا : $R(A)=B$ إذن : $\begin{cases} OA=OB \\ \overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

ومنه OAB مثلث متساوي الساقين في O و $\overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ وبالتالي OAB متساوي الأضلاع

أو لدينا : $b=e^{\frac{\pi}{3}i}a$ ومنه $\frac{b}{a}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ أي $\frac{b-0}{a-0}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

وبالتالي : $\begin{cases} \left|\frac{b-0}{a-0}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{3} \end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases} \frac{OB}{OA}=1 \\ \overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ثم الاستنتاج...

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0=13$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$ لكل n من $\mathbb{N}$

1 . * لنبين بالترجع أن : $u_n<14$ لكل n من $\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=13$ و $13<14$ إذن: $u_0<14$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n<14$ ونبين أن $u_{n+1}<14$.

لدينا : $u_n<14\Rightarrow\frac{1}{2}u_n<7$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}u_n+7<14$$

$$\Rightarrow u_{n+1}<14$$

إذن حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;u_n<14$

أو ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-14$

لدينا :
$$u_{n+1}-14=\frac{1}{2}u_n+7-14$$
$$=\frac{1}{2}u_n-7$$
$$=\frac{1}{2}(u_n-14)$$

وحسب الافتراض لدينا : $u_n<14$ ومنه $u_n-14<0$

وبالتالي $u_{n+1}-14<0$ أي $u_{n+1}<14$ ثم الاستنتاج ....

2 . نضع : $v_n=14-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ * لنبين أن : (v_n) متتالية هندسية

ليكن n من $\mathbb{N}$

لدينا :
$$v_{n+1}=14-u_{n+1}$$
$$=14-\left(\frac{1}{2}u_n+7\right)$$
$$=14-\frac{1}{2}u_n-7$$
$$=7-\frac{1}{2}u_n$$
$$=\frac{1}{2}(14-u_n)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N};\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

* **كتابة v_n بدلالة n**

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=14-u_0=1$

حسب صيغة الحد العام لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n=v_0q^n$

يعني : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب لنبين أن : $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا: $v_n=14-u_n\Leftrightarrow u_n=14-v_n$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

حساب النهاية

➤ لدينا : $-1<\frac{1}{2}<1$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(14-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=14$

ج-لنحدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي من أجلها يكون $u_n>13.99$

ليكن n من $\mathbb{N}$

$$u_n>13,99\Rightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13,99$$
$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<0,01$$
$$\Rightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right)<\ln(0,01)$$ لأن الدالة ln تزايدية
$$\Rightarrow n(-\ln 2)<-\ln 100$$
$$\Rightarrow n>\frac{\ln 100}{\ln 2}$$
$$\Rightarrow n>6,65$$

إذن أصغر عدد صحيح طبيعي بحيث $u_n>13,99$ هو 7 .

ملاحظة :

$$u_n>13,99\Rightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13,99$$
$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n<0,01$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10^2}$$
$$\Rightarrow 2^n>100$$

بما أن : $2^6=64$ و $2^7=128$

فإن أصغر عدد صحيح طبيعي بحيث $u_n>13,99$ هو 7 .

التمرين الرابع

يحتوي كيس على تسع بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس: وتحمل الأعداد 0 و 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و1

1 . نسحب عشوائيا وفي آن واحد بيدقتين من الكيس .

بما أن السحب تآني فإن كل سحبة فهي تأليفة لـ 2 من 9

إذن : $card(\Omega)=C_9^2=36$.

الحدث A : " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "يعني : $A=\{\ ⓪①\ \}$

لدينا : $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{C_5^1\times C_4^1}{36}=\dfrac{5\times4}{9\times4}=\dfrac{5}{9}$

إذن : $p(A)=\dfrac{1}{7}$

2. الفوز في اللعبة المقترحة هو سحب بيدقتين تحملان العدد 1

أ ـ حساب احتمال فوز سعيد

نعتبر الحدث B : " البيدقتين المسحوبتين تحملان معا العدد 1 " يعني : $B=\{①①\}$

لدينا : $p(B)=\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{C_4^2}{36}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

إذن :احتمال فوز سعيد في هذه اللعبة هو $\dfrac{1}{6}$

ب-لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (تعاد البيد قات المسحوبة إلى الكيس في كل مرة)

وضعية اختبارات متكررة

احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط هو :

$$p=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}$$

$$=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$$

إذن : احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط بعد إجراء ثلاث محاولات هو $\dfrac{5}{72}$

التمرين الخامس

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1 . حساب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$:

ليكن x من $]0;+\infty[$

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)'$$

$$=-\frac{-(x^2)'}{x^4}+(\ln x)'$$

$$=\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g'(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x}$

♦رتابة الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g'(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x}$ وبما أن: $x \in]0;+\infty[$

فإن: $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g'(x) > 0$ وبالتالي : g تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

.2 ♦لنحسب : $g(1)$

لدينا : $g(1) = 1 - \dfrac{1}{1^2} + \ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$ إذن : $g(1) = 0$

♦إشارة $g(x)$ على المجال $]0;1]$

لدينا :
$x \in]0;1] \Rightarrow x \leq 1$

لأن g تزايدية على المجال $]0;1]$ $\Rightarrow g(x) \leq g(1)$

لأن $g(1) = 0$ $\Rightarrow g(x) \leq 0$

إذن : $\forall x \in]0;1] \; ; \; g(x) \leq 0$

♦إشارة $g(x)$ على المجال $[1;+\infty[$

لدينا :
$x \in [1;+\infty[\Rightarrow x \leq 1$

لأن g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ $\Rightarrow g(x) \geq g(1)$

لأن $g(1) = 0$ $\Rightarrow g(x) \geq 0$

إذن : $\forall x \in [1;+\infty[\; ; \; g(x) \geq 0$

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \dfrac{1}{x^2}$ و ليكن

$(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$: (بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$).

.1♦ لنبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

نعلم أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln(x)) = -\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln(x))^2 = +\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[(1+\ln x)^2 + \dfrac{1}{x^2}\right] = +\infty$

♦التأويل الهندسي

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C}_f)$.

2. أ-حساب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x)\right)=+\infty$ وبالتالي: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln(x)\right)^2=+\infty$

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\ln x\right)^2+\frac{1}{x^2}\right]=+\infty$

ب-لنبين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}=0$

نضع: $t=\sqrt{x}$ ومنه $x=t^2$.   ولدينا : $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln t^2\right)^2}{t^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+2\ln t\right)^2}{t^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln t}{t}\right)^2\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln t}{t}\right)^2\\&=0\end{aligned}$$

لأن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}=0$

لنبين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

لدينا : $\frac{f(x)}{x}=\frac{\left(1+\ln x\right)^2+\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}+\frac{1}{x^3}$

وحيث أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln x\right)^2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

ج-تحديد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}= 0$

فإن $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3.أ- ♦ حساب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$

لدينا الدوال : $u:x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ و $\mathrm{v}:x\mapsto 1+\ln x$ و $w:x\mapsto x^2$ قابلة للاشتقاق على مجموعات تعاريفها وبالخصوص على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي $f=w\circ \mathrm{v}+u$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ليكن x من $]0;+\infty[$.

تذكير : $(u^n)'=nu'.u^{n-1}$ و $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right]'\\
&=2(1+\ln)'.(1+\ln x)-\frac{2x}{x^4}\\
&=\frac{2(1+\ln x)}{x}-\frac{2}{x^3}\\
&=\frac{2}{x}\left(1+\ln x-\frac{1}{x^2}\right)\\
&=\frac{2g(x)}{x} \qquad \left(g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x \right)
\end{aligned}$$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ; f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$

♦ رتابة الدالة f

لدينا : $\forall x\in]0;+\infty[\ ; f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$

بما أن : $x\in]0;+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

حسب نتيجة السؤال 2 الجزء الأول لدينا :

➤ $\forall x\in]0;1] \ ; \ g(x)\le 0$ ومنه $\forall x\in]0;1] \ ; f'(x)\le 0$

وبالتالي f دالة تناقصية على المجال $]0;1]$

➤ $\forall x\in [1;+\infty[\ ; \ g(x)\ge 0$ ومنه $\forall x\in [1;+\infty[\ ; f'(x)\ge 0$

وبالتالي f دالة تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

ب-جدول تغيرات الدالة f

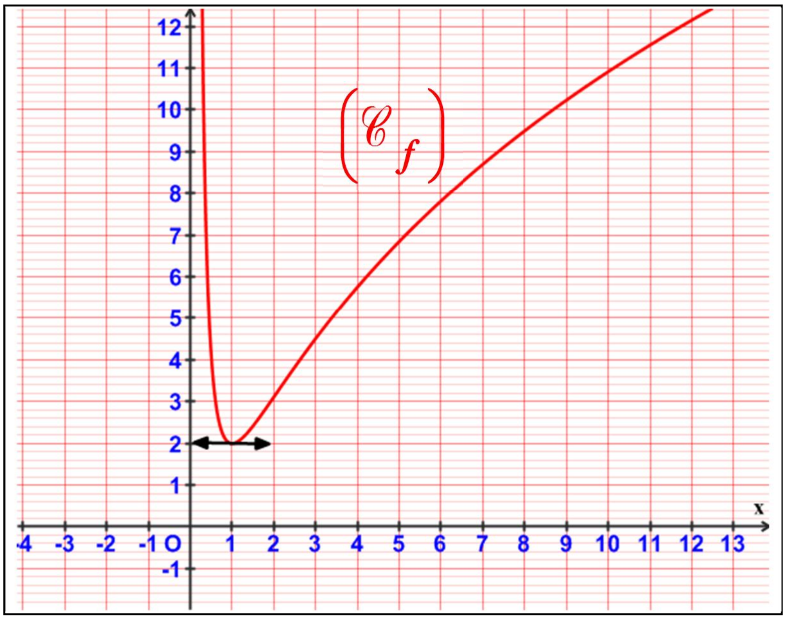
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

الاستنتاج

من خلال جدول التغيرات نستنتج أن $f(1)=2$ قيمة دنيا مطلقة للدالة f

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;f(x)\geq 2$

4 . إنشاء $(\mathscr{C}_f)$



5 . أ – لنبين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$

ليكن x من $]0;+\infty[$

$H'(x)=(x\ln x)'$ (H دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$)

$$=x'\ln x+x(\ln x)'$$

$$=\ln x+x\times\frac{1}{x}$$

$$=1+\ln x$$

$$=h(x)$$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;H'(x)=h(x)$

وبالتالي : $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$

* حساب التكامل $I=\int_1^e (1+\ln x)dx$

لدينا : $\int_1^e (1+\ln x)dx=\int_1^e h(x)dx=\left[H(x)\right]_1^e$ (H دالة أصلية للدالة h)

$=H(e)-H(1)$

$=e.\ln(e)-1.\ln(1)$

$=e$ (لأن: $\ln(e)=1$ و $\ln(1)=0$)

$$\boxed{\text{إذن : } \int_1^e (1+\ln x)dx=e}$$

ب- لنبين أن : $\int_1^e (1+\ln x)^2 dx=2e-1$ باستعمال مكاملة بالأجزاء

نضع : $\begin{cases} u(x)=(1+\ln x)^2 \\ \mathrm{v}'(x)=1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{2(1+\ln x)}{x} \\ \mathrm{v}(x)=x \end{cases}$

مع u و v دالتين متصلتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $[1,e]$

لدينا :

$$J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx=\left[u(x).\mathrm{v}(x)\right]_1^e-\int_1^e \mathrm{v}'(x)u(x)dx$$

$$=\left[x.(1+\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2(1+\ln x)dx$$

$$=\left[x.(1+\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e (1+\ln x)dx \quad (\text{الخطانية})$$

$$=\left(e(1+\ln(e))^2-1.(1+\ln(1))^2\right)-2\times I \quad (\text{حسب السؤال أ-})$$

$$=4e-1-2e$$

$$=2e-1$$

$$\boxed{\text{إذن : } J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx=2e-1}$$

ج- حساب مساحة Δ الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$

بما أن : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

فإن وحدة قياس المساحة هي : $ua=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=(1cm)\times(1cm)=1cm^2$

لدينا :

$$\mathcal{A}(\Delta)=\int_1^e |f(x)|dx \quad ua$$

$$=\int_1^e f(x)dx \quad ua \quad \left(\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)\geq 2\right.$$ السؤال 3.ب-الجزء الثاني)

$$=\int_1^e\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad ua$$

$$=J+\int_1^e \frac{1}{x^2}dx \quad ua$$ (الخطانية)

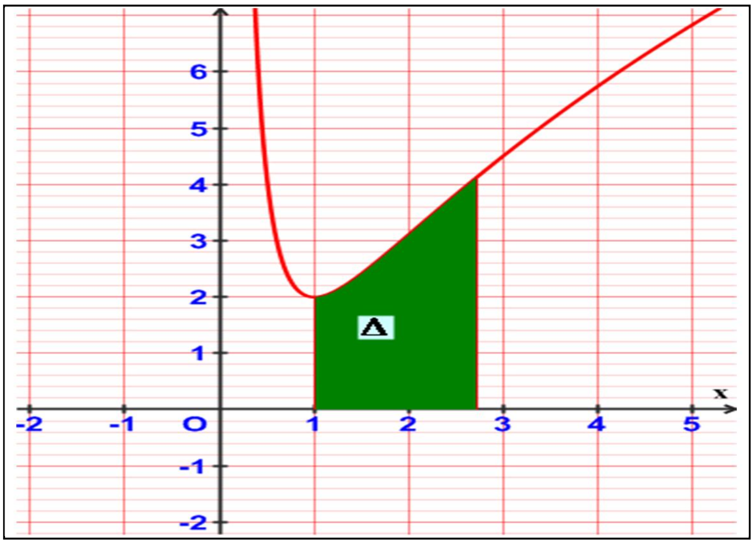
وحيث أن : $\int_1^e \frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^e=\frac{1}{e}+1$

فإن :

$$\mathcal{A}(\Delta)=2e-1-\frac{1}{e}+1 \quad ua$$

$$=\frac{2e^2-1}{e} \quad ua$$

إذن : $\boxed{\mathcal{A}(\Delta)=\frac{2e^2-1}{e}cm^2}$



انتهى بحمد الله سطات 2014/06/12

في تمام الحادية عشر والربع ليلا