ثـانـــويـة وادي الـــذهـب	فرض محروس رقم 4	الموسم الدراسـي	2011/2012
ثا.محمد بن الحسن الوزاني	في مادة الرياضـيات	مدة الإنجـــاز	ساعتان
تيـــفلت – الخميسـات	www.riyadiyat.net	المستوى الدراسي	2BSM

▪ **التمرين الأول: (12ن)**

(01) **I)**-1)- بين أنه إذا كانت F دالة أصلية لدالة متصلة و موجبة على $[a,b]$ فإن: $F(b)-F(a)\geq 0$.

(01) 2)- استنتج أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين متصلتين f و g على التوالي على قطعة $[a,b]$، حيث $\forall x\in[a,b], f(x)\leq g(x)$ فإن: $F(b)-F(a)\leq G(b)-G(a)$.

II)- لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{e^{\sqrt{x}}+1}$.

(01) 1)- أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(01) 2)-أ- أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا.

(01) ب- بين أن: $\forall x>0, f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}+1\right)^2}$، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

III)- لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$ التي تنعدم في الصفر.

نعتبر الدالة φ المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\left(F(4x^2)-F(x^2)\right), x>0$ و $\varphi(0)=0$.

(01) 1)- ليكن $x>0$. باستعمال السؤال I)-2)- بين أن: $3xf(x^2)\leq\varphi(x)\leq 3xf(4x^2)$.

(لاحظ أن $\forall t\in[x^2,4x^2], f(x^2)\leq f(t)\leq f(4x^2)$).

(01) 2)- بين أن φ متصلة في 0 على اليمين، ثم أدرس قابلية اشتقاق φ في 0 على اليمين.

(01) 3)- أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x)-3x)$.

(01) 4)-أ-بين أن: $\forall x>0, \varphi'(x)=8f(4x^2)-2f(x^2)-\dfrac{\varphi(x)}{x}$.

(01) ب- بين أن الدالة φ تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$. (يمكن استعمال III)-1).

5)- ليكن $x>0$.

(01) أ- بين أنه يوجد c من $]x,2x[$ بحيث: $\varphi(x)=2cf(c^2)$.

(يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية للدالة: $H: x\mapsto F(x^2)$).

(01) ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x}=\dfrac{3}{2}$.

▪ **التمرين الثاني: (8ن)**

لكل z من $\mathbb{C}-\{i\}$، نضع $f(z)=\dfrac{iz+2}{z-i}$. لتكن $A(2i)$ و $B(i)$ و $M(z)$ نقط من المستوى العقدي.

(01) 1)-أ- نضع $z=x+iy$. أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري.

(01) ب- حدد طبيعة المجموعة : $E=\{M(z)\in(P), f(z)\in\mathbb{R}\}$.

(01) 2)-أ- بين أن $\forall z\neq i, |f(z)|=\dfrac{AM}{BM}$ و $\forall z\in\mathbb{C}-\{i,2i\}, arg(f(z))\equiv\left(\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}\right)+\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

(01) ب-حدد طبيعة كل من المجموعتين:

$F=\{M(z)\in(P), |f(z)|=1\}$ و $G=\{M(z)\in(P), f(z)\in i\mathbb{R}^*\}$.

(01) 3)- بين أن: $|f(z)-i|=\dfrac{1}{|z-i|}$ و أن: $arg(f(z)-i)\equiv -arg(z-i)[2\pi]$.

(1ن) 4)-أ- حدد u و v حلي المعادلة $f(z)=z$، حيث $Re(u)=1$.

(1ن) ب- ليكن $z\in\mathbb{C}-\{i,u,v\}$، و لتكن $M(z)$ و $M'(f(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$ نقط من (P).

بين أن: $\frac{f(z)-u}{f(z)-v}=-\frac{z-u}{z-v}$ و استنتج أن: $\left(\overline{\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C}}\right)=\pi+\left(\overline{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}}\right)[2\pi]$.

(1ن) ج- بين أنه إذا كانت M و C و D مستقيمية فإن M و M' و C و D مستقيمية.

▪ إضافي

(1ن) د- بين أنه إذا كانت M و C و D غير مستقيمية فإن M و M' و C و D متداورة.

5)- نفترض أن: $z=i+e^{i\theta}$ حيث $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(1ن) أ- حدد معيار و عمدة العقدي $f(z)$.

(1ن) ب- حدد مجموعة النقط $M(f(z))$ عندما يتغير θ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.