« Certains exercices ont été télécharges sur un site internet avec des modifications un grand merci à l'auteur. »

Exercice1

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice2

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice3

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$$A_1 =]-\infty, 0];\ A_2 =]-\infty, 0[;\ A_3 =]0, +\infty[;\ A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1,2[; A_6 = [1,2[.$$
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \quad et \quad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice4

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice5

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice6

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :
$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$
On pose
$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E(A \cup B)$$
1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Exercice7

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice8

On rappelle que l'on note
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
1. Montrer que
$$(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap C \cap \overline{B}$$
2. En déduire que
$$(A \cap B)\Delta(A \cap C) = A \cap (B\Delta C)$$

Exercice9

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note

$$U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E.

$$(A \cup B) \cap \overline{(A \cup C)} = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$

$$(A \cup C) \cap \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = \overline{A} \cap (B\Delta C)$$

Exercice10

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice11

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Exercice12

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$
2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
   Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Exercice13

1. Ecrire en extension les ensembles suivants

   A=$\left\{x \in \mathbb{N} / \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\right\}$ et B=$\left\{x \in \mathbb{N} / \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$

2. Soit A =$\left\{\frac{-1+2k}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ B=$\{1 + 2k / k \in \mathbb{Z}\}$ .Montrer que A$\subset B$ et $A \neq B$.
3. Montrer que les deux ensembles suivants sont disjoints

   A =$\left\{\frac{4k+5}{10} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ et B=$\left\{\frac{8k+5}{20} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice14

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C)\ ?$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.