

### التمرين الأول ( نقطان ونصف )

يحتوي كيسر على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس .  
نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس وإذا  
كانت بيضاء نضع بدلها في الكيس 3 كرات حمراء ثم نسحب كرة من الكيس .  
1) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين .  
2) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين .  
3) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .  
4) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما بأن الكرة الثانية  
المسحوبة بيضاء

0,5  
0,5  
0,5  
1

### التمرين الثاني ( 3 نقط )

- (1) حل في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  المعادلة :  $(E): 3x - 2y = 1$  0,5  
(2) ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .  
أ- بين أن الزوج  $(14n+3, 21n+4)$  حل للمعادلة  $(E)$  . 0,25  
ب - استنتج أن العددين  $14n+3$  و  $21n+4$  أوليان فيما بينهما . 0,25  
(3) ليكن  $d$  هو القاسم المشترك الأكبر للعددين  $2n+1$  و  $21n+4$  .  
أ- بين أن  $d = 1$  أو  $d = 13$  . 0,5  
ب - بين أن :  $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 [13]$  0,5  
(4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي  $n$  بحيث  $n \geq 2$  نضع :  
 $A = 21n^2 - 17n - 4$  و  $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$  0,5  
أ- بين أن العددين  $A$  و  $B$  قابلين للقسمة على  $n-1$  في المجموعة  $\mathbb{Z}$  .  
ب - حد حسب قيم  $n$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $A$  و  $B$  . 0,5

### التمرين الثالث ( 4 نقط )

- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$   
ليكن  $a$  عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو:  $a = \alpha + i\beta$  .  
(1) لتكن  $(H)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  يحقق :  $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$  .  
أ- حدد طبيعة  $(H)$  . 0,5  
ب - أنشئ  $(H)$  في الحالة :  $a = 1+i$  . 0,5  
(2) لتكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  يحقق :  $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$  .  
أ- حدد طبيعة  $(C)$  . 0,5  
ب - أنشئ  $(C)$  في الحالة :  $a = 1+i$  . 0,5  
(3) نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  ، النظمة :  
 $(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$   
ونضع  $u = z - a$

أ- بين أن النظام (S) تكافئ النظام

$$(S) : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

0,5

ب - نضع  $a = re^{i\theta}$  حيث  $r > 0$  و  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

0,75

حدد بدلالة  $r$  و  $\theta$  ألقاق نقط تقاطع (C) و (H).

0,75

ج - استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع.

### ( 10 نقط و نصف ) التمرين الرابع

I - لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$$

وليكن (C) و (Γ) المنحنيين الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  على التوالي في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

( الوحدة :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$  )

أ- أحسب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

0,5

ب - حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (C).

0,5

(2) أ- بين أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 4(1-x \ln 2)e^{-x \ln 2}$

0,5

ب - أعط جدول تغيرات الدالة  $f$ .

0,25

ج - بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدان للمعادلة  $f(x) = 0$ .

0,75

(3) أدرس الدالة  $g$  : النهايات، الفروع اللانهائية، التغيرات.

1

(4) أرسم المنحنيين (C) و (Γ) في نفس المعلم.

1

( تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب - نأخذ :  $\ln 2 = 0,7$  ;  $e = 2,7$  ;  $\frac{1}{\ln 2} = 1,4$  ;  $\frac{1}{e} = 0,4$  )

II - ليكن  $k$  عددا حقيقيا بحيث :  $0 < k < \frac{2}{e}$ .

(1) أ- تحقق مبيانيا أن المعادلة  $g(x) = k$  تقبل حلين مختلفين ل  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث  $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$ .

0,5

ب - حدد قيمة العدد  $k$  بحيث يكون العددين  $\alpha$  و  $\beta$  هما حلا المعادلة :  $f(x) = 0$ .

0,25

نعتبر الدالة العددية  $f_k$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$

(2) أ- تأكد من أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f_k'(x) = 4(1-kx)e^{-kx}$ .

0,25

ب - أعط جدول تغيرات  $f_k$ .

0,5

(3) أ- استنتج أن المعادلة  $f_k(x) = 0$  تقبل بالضبط حلين مختلفين  $a$  و  $b$  بحيث :

0,5

$$a < \frac{1}{k} < b$$

ب - بين أن :  $a = \alpha$  و  $b = \beta$ .

1

(4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $(\forall t \in \mathbb{R}) : \int_0^t xe^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$

0,5

ب- أحسب التكامل  $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$  بدلالة  $\alpha$  و  $\beta$ .

0,5

ج- استنتج أن :  $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$ .

0,75

(5) بين أنه إذا كان  $u$  و  $v$  عددين حقيقيين مختلفين موجبين قطعاً بحيث :  $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$

0,75

فإن  $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$ .

