الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية : 2005)

الموضوع

المادة: الرياضيات — مدة الإنجاز : **4 ساعات**

الشعبة: **العلوم الرياضية (أ و ب)** — المعامل : **10**

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول : (2,5 ن)

$x\wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

$\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E)\ :\ (x+1)^2=9+5y$.

أ) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . — 0,5

بين أن $x\equiv1\,[5]$ أو $x\equiv2\,[5]$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . — 0,5

2) بين أن : $(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$ — 0,5

3) حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة : $\begin{cases}\overline{121}^{(x)}=\overline{59}^{(y)}\\ x\wedge y=8\\ x\equiv1\ [5]\end{cases}$ — 1

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر المنحنى (C_m) الذي معادلته هي:

$$\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{2-m}=1 \qquad (m\in\mathbb{R}\setminus\{2;10\}) .$$

I) 1) ناقش حسب قيم m ، طبيعة المنحنى (C_m) . — 1

2) إذا كان (C_m) مخروطيا ، أعط عناصره المميزة (المركز ، الرؤوس ، البؤرتان، المقاربان إن وجدا). — 1

3) ارسم (C_1) . — 0,25

II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E):\ z^2-(6\cos\alpha)z+1+8\cos^2\alpha=0 \qquad \text{حيث} \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,5

لتكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) $(\mathcal{Im}\,z_1>0)$ و M_1 و M_2 النقطتين ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي.

2) أ) تحقق أن : $M_1\in(C_1)$. — 0,25

ب) بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من (C_1) حيث يكون فيهما المماس للمنحنى (C_1) موازيا للمستقيم (OM_1) .	0,75
ج) تحقق أن : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$	0,75

التمرين الثالث : (2,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا اكبر أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء $n-10$ كرة سوداء . نفترض أن جميع الكرات غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب كرة من الكيس ونسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة . نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \le k \le n)$.

1) احسب p_k بدلالة n و k .	0,5
2) نضع $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث $k \in \{0,1,......,n-1\}$.	
أ) بين أن : $u_k = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{10}{n-10}$.	0,5
ب) بين أن : $0 \le k \le 9 \Leftrightarrow u_k \ge 1$ و $10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow u_k \le 1$	0,5
ج) استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما تتغير k في $\{0,1,2,...,n\}$. وبين أن : $M = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$.	1

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (1+x)e^{-2x}$.

ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I – 1) أ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.	0,5
ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .	0,5
2) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.	0,5
3) أ) ادرس تقعر المنحنى (C) .	0,5
ب) أنشئ المنحنى (C) .	0,5
4) أ) بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$.	0,5
ب) حدد الحل العام للمعادلة (E) .	0,5

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية: 2005)

المادة: الرياضيات

الشعبة: العلوم الرياضية (أ و ب)

الموضوع:

II ــ ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . نرمز ب A_n لمساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x=n$.

1) احسب A_n بدلالة n .	1
2) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.	0,5

III ــ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n\int_0^1 [f(x)]^n\,dx$.

1) بين أن : $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ (يمكنك استعمال تغيير المتغير $t=nx$)	0,75
2) أ) بين أن : $2-u \le \frac{1}{u} \le 1 \quad (\forall u\in[1,2])$.	0,5
ب) استنتج أن : $x-\frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x \qquad (\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in[0,n])$.	0,75
3) أ) بين أن : $u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$.	0,5
ب) بين أن : $e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}\,dx \le u_n \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$.	0,75
ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة و حدد نهايتها .	0,75
4) ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.	
أ) بين أن : $\int_a^1 n[f(x)]^n\,dx \le n(1-a)[f(a)]^n$.	0,5
ب) استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n[f(x)]^n\,dx = 0$.	0,5
ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a n[f(x)]^n\,dx$	0,5