ثانوية بئر أنزران . صفرو .
2011 - 2012

المتتاليات العددية

2 بكالوريا علوم فيزيائية 1
ذ: توفيق بنعمرو

$(U_n)_{n\geq n_0}$ حسابية إذا وُجِدَ r بحيث: $\forall n\geq n_0 : U_{n+1}-U_n=r$	$(V_n)_{n\geq n_0}$ هندسية إذا وُجِدَ k بحيث: $\forall n\geq n_0 : V_{n+1}=k\cdot V_n$
$(U_n)_{n\geq n_0}$ حسابية $\Leftrightarrow$ $\forall n>n_0 : 2U_n=U_{n-1}+U_{n+1}$	$(V_n)_{n\geq n_0}$ هندسية $\Leftrightarrow$ $\forall n>n_0 : V_n^{\ 2}=V_{n-1}\times V_{n+1}$
$(U_n)_n$ حسابية أساسها r، لدينا: $U_n=U_0+n\times r$ ، $U_n=U_p+(n-p)\times r$	$(V_n)_n$ هندسية أساسها k، لدينا: $V_n=V_0\times(k)^n$ ، $V_n=V_p\times(k)^{n-p}$
$1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$	$k+k^2+.....+k^n=\dfrac{1-k^n}{1-k}\quad k\neq 1$
$U_0+U_1+...+U_n=\dfrac{n+1}{2}\times(U_0+U_n)$	$V_0+V_1+...+V_n=V_0\times\dfrac{1-(k)^{n+1}}{1-k}$
$U_p+U_{p+1}+...+U_n=\dfrac{n-p+1}{2}\times(U_p+U_n)\ ,\ n>p$	$V_p+V_{p+1}+...+V_n=V_p\times\dfrac{1-(k)^{n-p+1}}{1-k}\ ,\ n>p$
(الحدّ الأوّل + الحدّ الأخير) × $\dfrac{(\text{عدد الحدود})}{2}$	(الحدّ الأوّل) × ($\dfrac{1-(\text{الأساس})^{(\text{عدد الحدود})}}{1-(\text{الأساس})}$)

$(u_n)_n$ تزايدية، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ \geq\ u_n$.	$(u_n)_n$ مكبورة ب A ، إذا كان: $\forall n:\ u_n\ \leq\ A$
$(u_n)_n$ تناقصية، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ \leq\ u_n$.	$(u_n)_n$ مصغورة ب B ، إذا كان: $\forall n:\ u_n\ \geq\ B$
$(u_n)_n$ ثابتة، إذا كان: $\forall n:\ u_{n+1}\ =\ u_n$.	$(u_n)_n$ محدودة ب A و B ، إذا كان: $\forall n:\ A\leq u_n\ \leq\ B$
($(u_n)_n$ تزايدية) $\Leftarrow$ ($\forall n: u_n>0$ و $\forall n: \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$)	($(u_n)_n$ تناقصية) $\Leftarrow$ ($\forall n: u_n>0$ و $\forall n: \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$)
$(u_n)_n$ تزايدية: $u_0\leq u_1\leq u_2\leq ...\leq u_{n-1}\leq u_n\leq u_{n+1}....$	$(u_n)_n$ تناقصية: $u_0\geq u_1\geq ...\geq u_{n-1}\geq u_n\geq u_{n+1}\geq ...$
$(u_n)_n$ متقاربة، إذا كانت نهايتها منتهية.	$(u_n)_n$ متباعدة، إذا كانت نهايتها غير منتهية أو ليست لها نهاية
كلّ متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة. كلّ متتالية تزايدية و سالبة هي متقاربة.	كلّ متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة. كلّ متتالية تناقصية و موجبة هي متقاربة.
$\forall n>n_0 : u_n\ \leq\ v_n$ و $\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ و $\lim\limits_{+\infty} v_n=\ell'$ $\Leftarrow$ $\ell\leq\ell'$ $(\lim\limits_{+\infty} v_n=+\infty)\Leftarrow(\lim\limits_{+\infty} u_n=+\infty$ و $\forall n>n_0 : u_n\leq v_n)$ $(\lim\limits_{+\infty} u_n=-\infty)\Leftarrow(\lim\limits_{+\infty} v_n=-\infty$ و $\forall n>n_0 : u_n\leq v_n)$ $(\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell)\Leftarrow(\lim\limits_{+\infty} v_n=0$ و $\forall n>n_0 : \lvert u_n-\ell\rvert\leq v_n)$ $\lim\limits_{+\infty} a_n=\ell\ \Big)\Leftarrow\begin{cases}\forall n>n_0 :\ u_n\leq a_n\leq v_n\\ \lim\limits_{+\infty} u_n=\lim\limits_{+\infty} v_n=\ell\end{cases}$	إذا كان $k>1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(k)^n=+\infty$ إذا كان $k=1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(k)^n=1$ إذا كان $-1<k<1$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(k)^n=0$ إذا كان $k\leq -1$ فإنّ المتتالية $(k^n)_n$ لا تقبل نهاية. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n)^r=+\infty \quad r>0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n)^r=0 \quad r<0$
$(\lim\limits_{+\infty}\lvert u_n\rvert=\lvert\ell\rvert)\Leftarrow(\lim\limits_{+\infty} u_n=\ell$ و $\ell\neq 0)$	$(\lim\limits_{+\infty}\lvert u_n\rvert=0)\Leftrightarrow(\lim\limits_{+\infty} u_n=0)$
إذا كانت f دالة متّصلة على مجال I بحيث $f(I)\subset I$ و $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة و $\forall n\geq n_0 : u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_{n_0}\in I$. فإنّ $\ell=\lim\limits_{+\infty} u_n$ يحقّق: $f(\ell)=\ell$.	إذا كان $\lim\limits_{+\infty} U_n=\ell$ و f دالة متّصلة في ℓ فإنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq n_0}$ حيث $\forall n\geq n_0 : V_n=f(U_n)$ متقاربة و $\lim\limits_{+\infty} V_n=f(\ell)$.