تمرين1

في $M_3(IR)$ نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ونضع

$G=\{I,J,A,B\}$ حيث $J=-I$ و $B=-A$ و I هي المصفوفة الوحدة .

1. تأكد أن G جزء مستقر في $(M_3(IR),\times)$.
2. بين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية.
3. لتكن المجموعة
$$E=\{M(a,b)=a.I+b.A/\ (a,b)\in IR^2\}$$
أ. بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وحدد بعده.
ب. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية وغير كاملة
4. نضع $D=I+A$. حدد D^n لكل n من $\mathbb{N}$ خذ $D^0=I$

تمرين2

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ والمجموعة E المعرفة بما يلي

$E=\{M\in M_3(IR)/\ M\times A=A\times M\}$.

1. ا. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
ب. بين أن الأسرة (I,A,A^2) أساس للفضاء E .
2. ا. بين أن تقبل مقلوبا في $(M_3(IR),\times)$.
ب. حدد A^{-1} بطريقتين مختلفتين.

تمرين3

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$. بين أن الأسرة $B=(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

تمرين4

في المجموعة IR^3 نعتبر الأسرة $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ حيث $\vec{e}_1=(1,0,0)$ و $\vec{e}_2=(0,1,0)$ و $\vec{e}_3=(0,0,1)$.

1. بين أن B أساس في $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.
2. ليكن $\vec{u}_1=(2,0,0)$ و $\vec{u}_2=(0,3,0)$ و $\vec{u}_3=(-1,\pi,2)$.
اكتب $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و $\vec{u}_3$ بدلالة $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ واستنتج أنها مستقلة خطيا .

تمرين5

لكل عددين حقيقيين a و b نعتبر المصفوفة $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$

ولتكن E المجموعة المعرفة ب $E=\{M(a,b)/\ (a,b)\in IR^2\}$
نزود هده المجموعة بالقانونين + و . (ضرب مصفوفة في عدد حقيقي)

1. بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.
2. نضع $J=M(0,1)$. بين أن $J^2=-I$ واستنتج أن الأسرة (I,J,J^2) مقيدة .

تمرين6

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ مزودة بعمليتي الجمع + و (ضرب دالة عددية في عدد حقيقي) . ولتكن E مجموعة الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث f' متصلة على $\mathbb{R}$.

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. ا. تأكد أن الأسرة $(1,\sin^2,\cos^2)$ مقيدة في E .
ت. ليكن λ و μ عددين حقيقيين حيث $\lambda\neq 0$ و $f_{\lambda,\mu}$ و $g_{\lambda,\mu}$ الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي
$$\forall x\in IR,\quad f_{\lambda,\mu}(x)=\cos(\lambda x)e^{\mu x}$$ و
$$\forall x\in IR,\quad g_{\lambda,\mu}(x)=\sin(\lambda x)e^{\mu x}$$
بين أن الأسرة $(f_{\lambda,\mu},g_{\lambda,\mu})$ حرة.
3. نعتبر المعادلة التفاضلية $(F):\ y''+ay'+by=0$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و $a^2-4b\prec 0$ ولتكن S مجموعة حلول (F) .
أ. بين أن $\forall f\in\mathcal{F},\quad f\in S\Rightarrow f\in E$
ب. بين أن S فضاء متجهي حقيقي.
4. نقبل أن $\dim S=2$ ونعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&1\\-b&-a\end{pmatrix}$
بين أن $\mu+i\lambda$ حل ل $\det(A-xI)=0 \Leftrightarrow (f_{\lambda,\mu},g_{\lambda,\mu})\in S^2$
حيث $\det\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=ad-bc$ ثم حدد S .

تمرين7

لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ نعتبر المصفوفة $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$

ولتكن E المجموعة $E=\{M(a,b,c)/\ (a,b,c)\in IR^3\}$
نزود هده المجموعة بالقانونين + و . (ضرب مصفوفة في عدد حقيقي)

1. ا. تأكد أن $E\neq\emptyset$.
ب. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
2. نضع $J=M(0,0,1)$
ا. احسب J^2 و J^3 واستنتج أن J تقبل مقلوبا ينبغي تحديده
ب. احسب J^n لكل n من $\mathbb{N}$ $J^0=I$.
ج. بين أن الأسرة $\Sigma=(I,J,J^2)$ حرة في E .
3. بين أن Σ تولد واستنتج $\dim E$.
4. بين أن $\forall M\in M_3(IR),\quad M\in E\Leftrightarrow M\times J=J\times M$
5. نضع $A=I+J$ و $B=I-J$ و $C=I+J+J^2$.
ا. تأكد أن A و B و C تنتمي إلى E .
ب. حدد إحداثيات A و B و C في الأساس Σ .
ج. بين أن $\Lambda=(A,B,C)$ أساس للفضاء E .