المستوى: ٢ ع ف ٢ — **الأستاذ:** محمد لغزال

الأعداد العقدية-الجزء II

التمرين ١

1) أكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد العقدية التالية : $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الأسّي $z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

التمرين ٢

1) عين شكلا أسّيا لكل من الأعداد العقدية التالية . $z_1=-e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ $z_2=-3e^{i\frac{\pi}{8}}$ ؛ $z_3=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) اعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد العقدية التالية . $z_1=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ؛ $z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_3=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

التمرين ٣

1) جد في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين المربعين للعدد العقدي $L=2-2i\sqrt{3}$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$.

التمرين ٤

نعتبر في C المعادلة (E) $mz^2-2z+\overline{m}=0$ بحيث m عدد عقدي معياره $\sqrt{2}$.

نضع $m=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ حيث $\alpha\in IR$.

1- بين أن حلي المعادلة z_1 و z_2 يكتبان على الشكل التالي $z'=e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$ و $z''=e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{4})}$

2- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم $(O\vec{u}\vec{v})$ نعتبر النقط M' ، M و M'' التي ألحاقها على التوالي $(z'+z'')$ ؛ (z') ؛ (z'') .

بين أن $\overrightarrow{OM''}\perp\overrightarrow{OM'}$ و أن الرباعي $OM'MM''$ مربع

التمرين ٥

1- نعتبر في C المعادلة (E) $z^2-mz-\overline{m}=0$ بحيث $m=1+i\sqrt{3}$

ا- تحقق أن $\Delta=(im)^2$

ب- حدد الشكل الجبري للحلين z_1 و z_2 لحلول المعادلة (نرمز لحلي المعادلة ب z_1 و z_2 بحيث $\text{Re}(z_1)\succ 0$)

ج- حدد الشكل المثلثي للعدد m ثم للحلين z_1 و z_2 ثم استنتج قيم $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

2- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم م. م. م $(O\vec{u}\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي ألحاقها على التوالي z_2 ; m , z_1 بين أن الرباعي $OABC$ مربع .

التمرين ٦

1) برهن أنّ : $\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

3) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث $S=\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{k\pi}{5}$ و $T=\sum_{k=0}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}$.

التمرين ٧

1- حل في C المعادلة $z^2-6z+34=0$

2- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم م. م. م $(O\vec{u}\vec{v})$ نعتبر النقط A و B ثم C التي ألحاقها $a=3-5i$ ، $b=3+5i$ و $c=7+3i$ و لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

ا- بين أن $z'=z+4-2i$ ثم تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

ب- بين أن $\frac{b-c}{a-c}=2i$ ثم استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC=2AC$

التمرين ٨

نضع لكل z من C :

$P(z)=z^3-(2\sqrt{3}+2)z^2+(4+4\sqrt{3})z-8$

1- احسب $P(2)$ ثم حدد العددين a و b بحيث
$P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

2- حل في C المعادلة $P(z)=0$ ثم اكتب الحلول على الشكل المثلثي

3- نعتبر النقط A و B التي ألحاقها على التوالي $z_A=2i$ و $z_B=\sqrt{3}+i$.

اكتب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل المثلثي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB ؟

4- نعتبر الدوران R الذي مركزه $A(2i)$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- حدد التمثيل العقدي ل R

- حدد لحق النقطة C صورة النقطة B بالدوران R ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

5- لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ حيث $R(M)=M'$, حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z'|=|z+i|$

التمرين ٩

1- ا- حل في C المعادلة $z^2+z+1=0$

ب- اكتب الحلول على الشكل المثلثي ثم احسب $(z_1^{2010}+z_2^{2010})$

2- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم م. م. م $(O\vec{u}\vec{v})$ نعتبر النقط A و B C P و S التي ألحاقها على التوالي $a=\frac{1}{2}+2i$; $b=\frac{1}{2}-2i$, $c=6+5i$,
$p=3+2i$ $s=\frac{-5}{2}+\frac{9}{2}i$

ا- بين أن $q=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$ هو لحق النقطة Q صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{W}(\frac{-3}{2}i)$

ب- بين أن $r=-5-i$ هو لحق النقطة R صورة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته -1

ج- أنشئ النقط P,Q,R,S ثم بين أن $\frac{r-q}{p-q}=i$ و استنتج طبيعة المثلث PQR ؟

4- بين أن الرباعي $PQRS$ مربع

التمرين ١٠

نعتبر في C المعادلة (E) $z^2-4iz-4(1+i)=0$ (نرمز لحلي المعادلة ب z_1 و z_2 بحيث $\operatorname{Re}(z_1)\succ 0$)

1- تحقق أن $\Delta=(2\sqrt{2}(1+i))^2$ ثم حدد الحلين z_1 و z_2

2- نضع $a=2i$; $b=\sqrt{2}(1+i)$ تحقق أن $z_1=a+b$ و $z_2=a-b$ ثم اكتب a ; b على الشكل المثلثي

3- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم م. م. م $(O\vec{u}\vec{v})$ نعتبر النقط A و B ; C التي ألحاقها على التوالي $a\,;b\,,\ z_1$.

ا- مثل النقط A و B C ثم تحقق أن $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ و $OA=OB$

ب- استنتج أن الرباعي $OBCA$ معين و أن $Arg(z_1)=\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

التمرين ١١

I)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

b. حدد الأعداد الحقيقية $a\,;\,b\,;\,c$ حيث : $P(z)=(z-2i)(az^2+bz+c)$.

c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$

1. مثل النقط A و B و C .

2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S.

3. بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها . أرسم (Γ).