أولمبياد الرياضيات 2020

الفرض الأول باللغتين العربية و الفرنسية

المستوى الدراسي : الجذع المشترك **الشعبة : العلمية**

تاريخ التمرير : الجمعة 24 نونبر 2017 **مدة الإنجاز : ساعتان**

ملحوظة هامة: يكتب بخط واضح على ورقة التحرير:
- اسم ونسب المترشح(ة) (بالحروف العربية واللاتينية) وتاريخ الميلاد،
- اسم المؤسسة والبلدة والمديرية الإقليمية.

Exercice 1 : Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{2} \text{ et } \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=2.$$

Calculer la valeur du nombre :

$$\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}.$$

التمرين 1 : لتكن x و y و z أعداداً حقيقية موجبة قطعاً حيث $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ و $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=2$.
احسب قيمة العدد :

$$\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}.$$

Exercice 2 : Soient $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu du segment $[BC]$. Soit H la projection orthogonale du point D sur La droite (AI).
Montrer que $CH = CD$.

التمرين 2 : ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و I منتصف القطعة $[BC]$. لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AI) .
بيّن أن $CH = CD$.

Exercice 3 :

1. Vérifier que : $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$ où x, a et b sont des réels strictement positifs.
2. montrer que $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$ où x, y et z sont des réels strictement positifs. Étudier le cas d'égalité.

التمرين 3 :

1. تحقق من أن : $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$ حيث x و a و b أعداد حقيقية موجبة قطعاً .
2. بيّن أن : $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$ حيث x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً . ادرس حالة التساوي .

Exercice 4 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère cinq points, les coordonnées de chacun d'eux sont des entiers naturels.
Montrer que, parmi ces cinq points, il existe au moins deux points qui forment un segment dont les coordonnées de son milieu, sont aussi des entiers naturels.

التمرين 4 : المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر خمسة نقط إحداثيات كل واحدة منها ، أعداداً صحيحة طبيعية .
بيّن أنه ، من بين هذه النقط الخمس ، توجد نقطتان على الأقل تحددان قطعة ، إحداثيات منتصفها هي كذلك أعداداً صحيحة طبيعية .