تمرين 01

أكتب العبارات التالية بالمكممات و الروابط المنطقية:

1) كل عدد جذري a يكتب $a=\frac{p}{q}$: $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$

2) مهما يكن x من $\mathbb{R}$، يوجد عدد صحيح نسبي وحيد p بحيث: $p\le x<p+1$.

3) لكل عدد حقيقي x يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n\ge x$.

تمرين 02

أوجد نفي العبارات الآتية ثم حدد قيمة حقيقتها.

1) $(\forall x\in\mathbb{R}),(\exists n\in\mathbb{N})/\ n>x$.

2) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x<y\Rightarrow\exists a\in\mathbb{R}/\ x<a<y$

3) $\exists!k\in\mathbb{Z}/-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\le\pi$.

4) $\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}/\ y^2-xy-1=0$.

تمرين 03: (الاستدلال بالمضاد للعكس)

بين أن:

1) $\forall\varepsilon>0,|a|<\varepsilon\Rightarrow a=0$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

2) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy\ne1$ و $x\ne y\Rightarrow\frac{x}{x^2+x+1}\ne\frac{y}{y^2+y+1}$

تمرين 04: (الاستدلال بالخلف)

1) بين أن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

2) بين أن $\sqrt{\frac{2}{3}}\notin\mathbb{Q}$

تمرين 05

ليكن $a\in\mathbb{Q}$ و $b\in\mathbb{Q}$.

1) نبين أن: $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=0$ و $b=0$

2) استنتج أن:

$$x+y\sqrt{2}=x'+y'\sqrt{2}\Rightarrow x=x' \text{ و } y=y'$$

لكل x و x' و y و y' من $\mathbb{Q}$.

تمرين 06: الاستلزامات المتتالية

1) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^+,\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$.

2) $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

تمرين 07: التكافؤات المتتالية

1) بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}^+,0\le\frac{x}{x^2+x+1}\le\frac{1}{3}$.

2) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},x+\frac{1}{x}\ge2$

تمرين 08: (فصل الحالات)

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|x^2-1|-x-1=0$

2) بين أن : n زوجي $\Rightarrow$ n^2 زوجي $\forall n\in\mathbb{N},$

تمرين 09: (الاستدلال بالمثال المضاد)

1) بين أن العبارة : $\forall x\in\mathbb{R}^*,x+\frac{1}{x}\ge2$ خاطئة

2) بين أن العبارة: $\forall x\in\mathbb{R},x^2>0$ خاطئة

تمرين 10: (الاستدلال بالترجع)

ليكن q عددا حقيقيا يخالف 1.

1)- بين بالترجع أن:

$$\forall n\in\mathbb{N},1+q+q^2+q^3+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2)- استنتج تبسيطا للمجموع:

$$S=1+2+2^2+2^3+...+2^{99}$$

تمرين 11

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$S_n=2+4+6+...+2n$$

1)- أ- أحسب : S_1 و S_2 .

ب- بين بالترجع أن : $S_n=n\ n+1$.

2)- استنتج قيمة المجموع:

$$S=2+4+6+......+100 .$$

تمرين 12

بين أن لكل n من $\mathbb{N}$:

$$1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

تمرين 13

ليكن α عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N},(1+\alpha)^n\ge1+n\alpha$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$ بحيث $n>2$ و $p>2$ بين أن المتساوية $n^{p-1}=p$ خاطئة

3) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\frac{n}{2^{n-1}}\le4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

تمرين 14

ليكن α عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1)- بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\},(1+\alpha)^n\ge1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

2)- بين أن:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\},\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\ge\frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$$