Examen Blanc 1^{er} semestre

Prof :Salim Mchennec

Classe :2ème année SC. Maths B.BIOF

Année : 2016/2017

-L'examen est composé de 3 problèmes et un exercice indépendants.

-La durée de l'examen est 4h.

-L'utilisation du stylo rouge est interdite.

-L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

Problème1 :

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

I) 1) Etudier les variations de g sur l'intervalle $[0;+\infty[$

2) Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$

II) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

1) Montrer que : $\lim_{x\longmapsto-\infty} f(x) = 0 \ \ et \ \lim_{x\longmapsto+\infty} f(x) = 1$
2) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$
3) Dresser le tableau de variations de f
4) Construire (C) la courbe de la fonction f et (C') la courbe de la fonction $(-f)$ dans le meme repere orthonormée $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (On admet que -0.7 est une valeur approchée de l'abscisse de l'unique point d'inflexion de (C)) .
5) Montrer que pour tout x de $[-1;0]$: $0 < f'(x) < g(e)$
6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une unique solution α dans IR et que $-1 < \alpha < 0$
7) On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : u_0=0 et $u_{n+1} = -f(u_n) \ \ pour\ tout\ n\ de\ IN)$

A- Montrer que $\forall n \in IN :\ -1 \leq u_n \leq 0$

B- Montrer que : $\forall n \in IN\ \ : |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

C- Déduire que : : $\forall n \in IN\ \ : |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$

D- Sachant que $g(e) < 0.6$, déterminer $\lim_{n\longmapsto+\infty} u_n$

Partie 2 : On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$$

1) Calculer F(1).

2) A- Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis déterminer$F'(x)$.

B- Déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$ on a : $F(x) = 0$.

3) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$F(x) = (\arctan x + \arctan\frac{1}{x})\, lnx - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan\ t}{t}\ dt$$

4) Montrer que : $(\forall x > 0)$: $Arctan\ \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

5) En déduire que : $(\forall x > 0)$: $\ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\arctan\ t}{t}\ dt$.

Problème 2 : (Etude des solutions positives de l'équation

$\mathbf{e^x = x^n}$ avec $\mathbf{n \in IN^*}$)

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $D = [0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormée $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Vérifier que pour tout x de l'ensemble $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$, on a :

$$(E) : \quad e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$$

2) Montrer que la fonction f est dérivable à droite de 0
3) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\mapsto 1^-} f(x)$, $\lim_{x\mapsto 1^+} f(x)$, $\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter les résultats graphiquement .
4) Etudier les variations de f dans chacun des deux intervalles $]1;+\infty[$ et [0 ; 1[puis dresse son tableau de variations.
5) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion à déterminer.
6) Construire la courbe (C)
7) Montrer que si $n \geq 3$,alors l'équation (E) admet exactement deux solutions $a_n\ et\ b_n$ telles que : $1 < a_n < e < b_n$

Partie 2 : (Etude de la convergence des suites $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n\geq 3}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n\geq 3}}$

1) Montrer que : $(\forall n \geq 3)$ $b_n \geq n$ puis déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$

2) A- Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

B- Montrer que : $(\forall n \geq 3)$ $\quad \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$ puis déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 3}$

C- Montrer que : $\lim_{n\mapsto+\infty} {a_n}^n = e$.

Problème 3 : (Etude d'une suite de fonctions)

Soit n de IN^*

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln x - \frac{n}{x}$ et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormée $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) A- Etudier les deux branches infinies de (C_n)

   B- Etudier les variations de f_n sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

   C- Construire (C_2)

2) Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0; +\infty[$ $vers\ IR$

3) A- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un unique réel $\alpha_n$de l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

   B- Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

   C- Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante .

4) A- Montrer que : $(\forall x > 0)$ $\quad \ln(x) < x$

   B- Montrer que : $\lim_{n\mapsto+\infty} \alpha_n = +\infty$

Exercice : (Application du TAF)

Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2} \quad et\ v_n = \ln(u_n)$$

1) Vérifier que : $(\forall n \geq 1)$

$$v_n = n^2[\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$$

2) En utilisant le T.A.F, montrer que :

$$(\forall n \geq 1) \ \ (\exists c \in]n; n+1[\ ) \qquad v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

3) Montrer que :

$$(\forall n \geq 1) \ \ \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

4) Déterminer$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n$.

FIN