تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم رياضية

يوليوز 2011

ذ. سعيد الصديق ثا.الشابي التأهيلية تارودانت

التمرين الأول

❶ أ– * قانون تركيب داخلي في I :

ليكن x و y من $I =]0;1[$:

لدينا :

$$\forall(x;y) \in I^2 : (1-x)(1-y) > 0 \text{ و } xy > 0$$

$$\Rightarrow \forall(x;y) \in I^2 : xy + (1-x)(1-y) > \ xy$$

$$\Rightarrow \forall(x;y) \in I^2 : 0 < \frac{1}{xy + (1-x)(1-y)} < \ \frac{1}{xy}$$

$$\Rightarrow \forall(x;y) \in I^2 : 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < \ 1$$

$$\Rightarrow \forall(x;y) \in I^2 : 0 < x * y < \ 1$$

$$\Rightarrow \forall(x;y) \in I^2 : x * y \in I$$

ب– * قانون تبادلي في I:

ليكن x و y من $I =]0;1[$:

$$\forall(x;y) \in I^2 : x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{yx}{yx+(1-y)(1-x)}$$

*** قانون تجميعي في I:**

ليكن **x** و **y** و **z** من **I** :

$$\forall(x;y;z)\in I^3 : (x*y)*z = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}*z$$

$$= \frac{\frac{xyz}{xy+(1-x)(1-y)}}{\frac{xyz}{xy+(1-x)(1-y)}+\left(1-\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}\right)(1-z)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz+(xy+(1-x)(1-y)-xy)(1-z)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

من جهة أخرى:

$$\forall(x;y;z)\in I^3 : x*(y*z) = (y*z)*x$$

$$= \frac{yzx}{yzx+(1-y)(1-z)(1-x)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$= (x*y)*z$$

ج- ليكن **e** العنصر المحايد للقانون التبادلي* في **I** :

إذن

$$(\forall x \in I) \quad x * e = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad \frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad \frac{e}{xe + (1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad e = xe + (1-x)(1-e)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad e(1-x) - (1-x)(1-e) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad (1-x)(2e-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2e - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e = \frac{1}{2}$$

وبالتالي :

$\frac{1}{2}$ هو العنصر المحايد للقانون * في I

❷ (I ;*) زمرة تبادلية :

ليكن x من I و x' مماثله بالنسبة للقانون * :

$$x * x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow xx' = \frac{1}{2} xx' + \frac{1}{2}(1-x)(1-x')$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} xx' = \frac{1}{2}(1-x)(1-x')$$

$$\Leftrightarrow xx' = 1 - x' - x + xx'$$

$$\Leftrightarrow x' = 1 - x \quad \in I$$

إذن كل عنصر x من I يقبل مماثلاً 1-x بالنسبة للقانون * في I

أي : – * قانون تركيب داخلي تجميعي وتبادلي في I .

– * يقبل عنصرا محايدا $\frac{1}{2}$ في I .

– كل عنصر من I يقبل مماثلاً بالنسبة للقانون * في I.

و بالتالي :

$$\boxed{\text{زمرة تبادلية } (I;*)}$$

❸ أ– H زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*;\times)$:

لدينا $H \subset \mathbb{R}_+^*$ ، و $H \neq \emptyset$ (لأن : $2 \in H$)

ليكن x و y من H :

إذن: $\exists (n;m) \in \mathbb{Z}^2 : \ x = 2^n$ و $y = 2^m$

$$\Rightarrow \exists\ n-m\ \in \mathbb{Z}\ :\ \frac{x}{y} = 2^{n-m}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{y} \in H$$

ب– φ تشاكل من $(H;\times)$ نحو $(I;*)$:

ليكن 2^n و 2^m من H :

لدينا :

$$\varphi(\,2^n \times 2^m) = \varphi(\,2^{n+m}) = \frac{1}{1+2^{n+m}}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\varphi(\,2^n) * \varphi(\,2^m) = \frac{1}{1+2^n} * \frac{1}{1+2^m}$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)}}{\frac{1}{(1+2^n)(1+2^m)}+\left(1-\frac{1}{1+2^n}\right)\left(1-\frac{1}{1+2^m}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+(1+2^n)(1+2^m)\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)\left(\frac{2^m}{1+2^m}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+2^{n+m}}$$

$$= \varphi(\, 2^n \times 2^m)$$

أي:

$$\varphi(\, 2^n \times 2^m) = \varphi(\, 2^n) * \varphi(\, 2^m)$$

ج- k زمرة جزئية للزمرة (I ;*)

بما أن φ تشاكل من $(H;\times)$ نحو (I ;*) فإن : φ(H) زمرة جزئية للزمرة (I ;*).

من جهة أخرى لدينا : k = φ(H). في الواقع :

$$x \in K \iff \exists n \in \mathbb{Z} : x = \frac{1}{1+2^n}$$

$$\iff \exists\, 2^n \in H : x = \varphi(\, 2^n)$$

$$\iff x \in \varphi(\mathrm{H})$$

وبالتالي : k زمرة جزئية للزمرة (I ;*)

التمرين الثاني

❶ أ- $10^{x+1} \equiv 1[19]$

X عدد حقيقي يحقق : $10^x \equiv 2[19]$

إذن $10^{x+1} \equiv 20[19]$

أي $10^{x+1} \equiv 1[19]$

ب- $10^{18} \equiv 1[19]$

19 عدد أوّلي حسب مبرهنة – فيرما – : $10^{19} \equiv 10[19]$

بما أن : $10 \wedge 19 = 1$ فإن : $10^{18} \equiv 1[19]$

❷ أ- $10^{d} \equiv 1[19]$

بما أن : $d = 18 \wedge (x+1)$ فإنه يوجد عددين u و v من $\mathbb{Z}$ بحيث :

$$d = 18u + (x+1)v$$

لدينا

$$\left.\begin{array}{r} 10^{18} \equiv 1[19] \\ 10^{x+1} \equiv 1[19] \end{array}\right\}$$

إذن :

$$\left.\begin{array}{r} 10^{18u} \equiv 1[19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1[19] \end{array}\right\}$$

أي :

$$10^{18u+(x+1)v} \equiv 1[19]$$

و بالتالي:

$$10^{d} \equiv 1[19]$$

ب- d=18

لدينا d يقسم العدد 18 إذن : $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

$10^{1} \equiv 10[19]$ $\quad 10^{2} \equiv 5[19]$ $\quad 10^{3} \equiv 12[19]$

$10^{9} \equiv 11[19]$ $\quad 10^{6} \equiv 11[19]$

بما أن $10^{d} \equiv 1[19]$ فإن d=18

ج- $x \equiv 17[18]$

لدينا d يقسم x+1 أي : 18 يقسم x+1

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 1 = 18k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -1 + 18k$$

$$\Rightarrow x \equiv -1[18]$$

$$\Rightarrow x \equiv 17[18]$$

التمرين الثالث

الجزء الأول:

❶ نضع : $p(z) = z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$

إذن :

$$p(-2i) = (-2i)^3 - (1+2i)(-2i)^2 + 3(1+i)(-2i) - 10(1+i)$$
$$= 8i + 4(1+2i) - 6i(1+i) - 10(1+i)$$
$$= 8i + 4 + 8i - 6i + 6 - 10 - 10i$$
$$= 0$$

إذن -2i حل للمعادلة (E)

❷ لنحدد α و β بحيث $p(z) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

لدينا

$$p(z) = (z+2i)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2iz^2 + 2i\alpha z + 2i\beta$$
$$= z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

إذن

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1+i) & \times\left(\frac{-i}{2}\right) \\ \alpha + 2i = -(1+2i) \end{cases}$$

إذن

$$\begin{cases} \beta = 5i(1+i) \\ \alpha = -1-4i \end{cases}$$

وبالتالي :

$$\alpha = -1-4i \text{ و } \beta = -5+5i$$

❸ أ– الجذرين المربعين للعدد 5-12i :

X و y عددان حقيقيان :

$$(x+iy)^2 = 5-12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 5-12i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5 \text{ و } xy = -6$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$|x+iy|^2 = |5-12i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13$$

إذن الزوج (x ;y) يحقق النظمة :

$$\begin{cases} X^2 - y^2 = 5 \\ X^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} X^2 = 9 \\ Y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

إذن (x ;y) = (-3 ; 2) أو (x ;y) = (3 ;-2)

الجذران المربعان للعدد 5 - 12i هما : 3 -2i و -3 +2i

ب – حل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$:

$(E) \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i) = 0$

$\Leftrightarrow z+2i = 0$ أو $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود : $z^2-(1+4i)z-5+5i$

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4(-5+5i)$$
$$= 5-12i$$
$$= (3-2i)^2$$

و بالتالي :

$$(E) \Leftrightarrow z = -2i \text{ أو } z = \frac{1+4i+3-2i}{2} \text{ أو } z = \frac{1+4i-3+2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ أو } z = 2+i \text{ أو } z = -1+3i$$

$$S = \{-2i\,;2+i\,;-1+3i\}$$

الجزء الثاني :

❶ ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i} = \frac{-3+2i}{-2-3i} = \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)i}{2i-3} = -i$$

أي :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{|a-c|}{|b-c|} = \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = |-i| = 1$$

$$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) \equiv arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right)[2\pi] \equiv arg(-i)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

❷ أ– صيغة الدوران R_1 :

لدينا $R_1 : \; z' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-b)$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2i) - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$$

ب- z_2 لحق M_2 بدلالة z :

$$z_2 + 1 - 3i = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+1-3i) - 1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - (1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

ج- I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثابتة

ليكن z_1 لحق النقطة M_1

I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ يعني : $2z_I = z_1 + z_2$

$$= \cancel{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}z - \sqrt{3} - i + -\cancel{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}z - (1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{3} - i - (1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

إذن : لحق النقطة I ثابت و بالتالي النقطة I ثابتة.

التمرين الرابع

❶ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x + lnx) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x + lnx) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{lnx}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty$$

❷ أ- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا :

$$(\forall x \in]0;+\infty[\,) : \ f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$$

	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ب- f تقابل :

الدالة f متصلة و رتيبة قطعا على المجال $]0;+\infty[$ إذن فهي تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

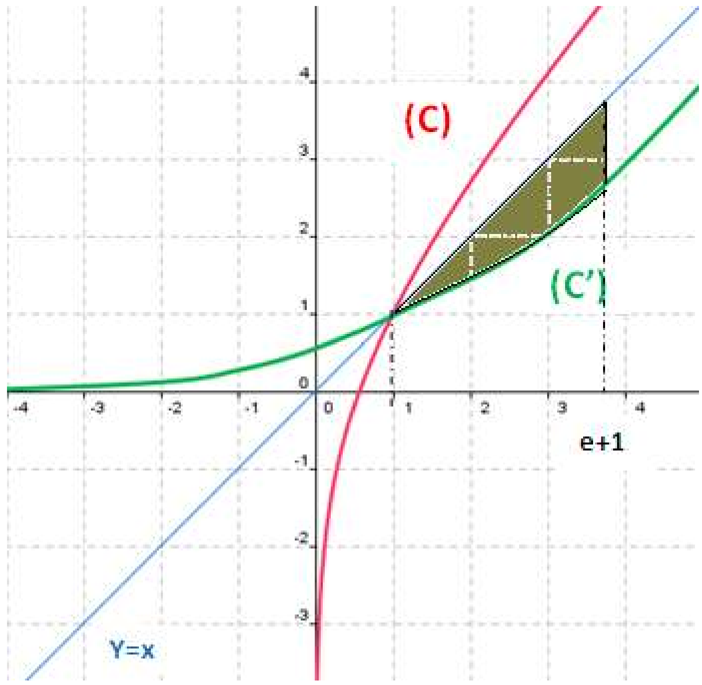
جدول تغيرات الدالة f^{-1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 ↗	$+\infty$

❸ إنشاء (C) و (C') في م.م.م.

$$f(1) = 1 + ln1 = 1$$

$$f(e) = e + lne = e + 1$$



❹ أ- حساب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$

نضع: $t = f^{-1}(x)$ إذن : $f(t) = x$ أي : $f'(t)dt = dx$

نستعمل مكاملة بالأجزاء :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx = \int_1^e tf'(t)dt = [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)dt$$

$$= e(e+1) - 1 - \left[\frac{t^2}{2} + tlnt - t\right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}$$

ب- حساب $\mathcal{S}$ مساحة الحيز المحصور بين (C') و المستقيمات x=1 و x=e+1 و y=x

$$\mathcal{S} = \int_1^{e+1} \left|x - f^{-1}(x)\right| dx = \int_1^{e+1} \left(x - f^{-1}(x)\right) dx$$

$$= \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + e\right) - \left(\frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

❺ أ- (E_n) تقبل حلاً وحيدا x_n:

لدينا : $(E_n) \Leftrightarrow f(x) = n$

الدالة f تقابل من $]0; +\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيد x_n.

ب- قيمة x_1:

$$(E_1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

إذن

$$x_1 = 1$$

* $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

ليكن : $A \in \mathbb{R}_+^*$

لدينا $f(x_n) = n$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

حسب تعريف هذه النهاية فإنه :

$$(\forall B \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N}^*) : n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq B$$

نأخذ : $B = f(A+1) > 0$

$f(A+1) > f(1) = 1$

f تزايدية

إذن :

$$(\exists N \in \mathbb{N}^*) : n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq f(A+1)$$

$$\Rightarrow x_n \geq A+1$$

$$\Rightarrow x_n \geq A$$

و هذا يعني أن : $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

❻ أ- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; f(x_n) \leq f(n)$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; \ln(n) \geq 0$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; n + \ln(n) \geq n$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; f(n) \geq f(x_n)$$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; f(n) \geq f(x_n)$

بما أن f دالة تزايدية فإنَّ :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; n \geq x_n$$

ب- $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; n - \ln(n) \leq x_n$

لدينا :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; 0 < x_n \leq n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;:\; \ln(x_n) \leq \ln(n)$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: x_n + \ln(x_n) \leq x_n + \ln(n)$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: f(x_n) \leq x_n + \ln(n)$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: n \leq x_n + \ln(n)$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: n - \ln(n) \leq x_n$$

ج- حساب النهايتين : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n}$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n-\ln(n)}$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: n - \ln(n) \leq x_n \leq n$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;: \frac{-\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n - n}{n} \leq 0$

بما أن : $\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(n)}{n} = 0$

فإن : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{x_n}{n-ln(n)} = \frac{x_n-n}{n-ln(n)} + \frac{n}{n-ln(n)}$

$$= \frac{x_n-n}{n} \times \frac{n}{n-ln(n)} + \frac{n}{n-ln(n)}$$

بما أن : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-n}{n} = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-ln(n)} = 1$

فإن : $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n-ln(n)} = 0 \times 1 + 1 = 1$

التمرين الخامس

❶ الدالة f_n متصلة على المجال $]0;1[$ لأنها حدودية.

ليكن x من $]0;1[$

$$f'_n(x) = 1 + x + x^2 + .. + x^{n-1} > 0$$

إذن الدالة f_n رتيبة قطعا على المجال $]0;1[$

من جهة أخرى لدينا :

$$f_n(0) = -1 < 0$$

$$f_n(1) = -1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$$

أي : $f_n(0) \times f_n(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد عدد وحيد α_n من المجال $]0;1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$

❷ $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا.

لدينا : $(\forall x \in]0;1[) : f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

أي $(\forall x \in]0;1[) : f_{n+1}(x) > f_n(x)$

بما أنه : $(\forall n \geq 2) : \alpha_{n+1} \in]0;1[$

فإن :
$$(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 2) : f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 2) : \alpha_n > \alpha_{n+1}$$

$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$

$(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة :

المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 إذن فهي متقاربة .

❸ أ–

المتتالية : $t^n \longrightarrow n$ هندسية أساسها t $(t \neq 1)$ إذن :

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1 - t^n}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t}$$

ب– لدينا

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + t^2 + \cdots + t^n)\, dt = \int_0^{\alpha_n} \frac{dt}{1-t} - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow \left[t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n}\right]_0^{\alpha_n} = [-\ln(1 - t]_0^{\alpha_n} - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow \alpha_n + \frac{{\alpha_n}^2}{2} + \cdots + \frac{{\alpha_n}^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1 - t}$$

❹ أ– $1 + \ln(1 - \alpha_n) = \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$

لدينا :
$$\alpha_n + \frac{{\alpha_n}^2}{2} + \cdots + \frac{{\alpha_n}^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow f_n(\alpha_n) + 1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1 - \alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1 - t}$$

$f_n(\alpha_n) = 0$

ب- $(\forall n \geq 2\,):\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$

ليكن $n \geq 2$

لدينا :

$$0 \leq t \leq \alpha_n \Rightarrow -1 \leq t-1 \leq \alpha_n - 1$$

$$\Rightarrow 1-\alpha_n \leq 1-t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1-\alpha_n \leq 1-t \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}$$

$\alpha_n^{n+1} < 1$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

ج- $\ell = 1 - e^{-1}$

لدينا :

$$0 < \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

بما أن :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}=0$$

فإن :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n dt}{1-t}=0$$

أي :

$$\lim_{n\to\infty}1+\ln(1-\alpha_n)=0$$

من جهة أخرى لدينا :

$$(\forall n\geq 2):\ \alpha_n\in\,]0;1[\,\Rightarrow\ \ell\in[0;1]$$

المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا إذن : $\ell\leq\alpha_2<1$

أي : $\ell\in[0;1[$

الدالة $x\to 1+ln(1-x)$ متصلة على المجال $[0;1[$ أي متصلة في ℓ

و بالتالي :

$$\lim_{n\to\infty}1+\ln(1-\alpha_n)=1+\ln(1-\ell)$$

$$\Rightarrow 0=1+\ln(1-\ell)$$

$$\Rightarrow -1=\ln(1-\ell)$$

$$\Rightarrow e^{-1}=1-\ell$$

$$\Rightarrow \ell=1-e^{-1}$$

لا تنسونا من صالح دعائكم