المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2009
الموضوع

C:NS24

المعامل:	9	المـــادة:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	4	الشعب(ة) أو المسلك:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. لتكن F مجموعة

المصفوفات $M(x,y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

1- أ) بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,25

ب) بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية. 1

2- لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من F حيث $x\in\mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$. 0,5

3- ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي:

$$\forall(x,y)\in E\ ;\ \forall(a,b)\in E \qquad (x,y)\perp(a,b)=\left(xa, xb+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi: (F,\times) &\to (E,\perp)\\ M(x,y) &\to \varphi(M(x,y))=(x,y)\end{aligned}$$

أ) احسب $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$ 0,25

ب) بين أن φ تشاكل تقابلي . 0,5

ج) استنتج بنية $(E,\perp)$. 0,5

التمرين الثاني:(4 نقط)

m عدد عقدي يخالف 1 .

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i\left(m^2+1\right)=0$$

0,25 — 1-أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$

0,25 — ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

0,5 — ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1 .

1 — 2- نضع: $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ، أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

II. المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي m و $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

0,5 — 1- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية

0,5 — 2-أ) بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z'=1-iz$

هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته.

0,5 — ب) بين أن العدد العقدي $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$

($\mathrm{Re}(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\mathrm{Im}(m)$ هو جزؤه التخيلي)

0,5 — ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة.

التمرين الثالث:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $a_n=2^n+3^n+6^n-1$

0,25 — 1- أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$

0,5 — ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n\equiv 0[3]$

2- ليكن p عددا أوليا بحيث $p>3$

0,75 — أ) بين أن $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و $6^{p-1}\equiv 1[p]$

0,75 — ب) بين أن p يقسم a_{p-2}

0,75 ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n

بحيث: $a_n \wedge q = q$ ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)

مسألة:(10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ من أجل $x>0$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول

0, 5 1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x=t^n$)

0,25 ب)ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0

1 ج) حدد النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

0,5 2- أ) ادرس تغيرات الدالة f_1

0,5 ب) ادرس تغيرات الدالة f_2

0,25 3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

0,5 ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) .(نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2))

(نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

0,5 1- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و أن : $F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $(\forall x<0)$

0,25 ب) استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0[$

0,25 2- أ) بين أن: $\dfrac{1}{1+e^{2x}}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$ $(\forall x<0)$

0,25 ب) تحقق أن الدالة $x \to x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$

0,25 ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

3- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8}\leq\ell\leq\frac{3}{4}$	0,25
الجزء الثالث	
لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\int_1^e f_n(x)dx$	
1- أ) بين أن : $u_n\geq 0$ $(\forall n\geq 1)$	0,5
ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$	0,5
ج) بين أن: $u_{n+1}\leq u_n$ $(\forall n\geq 1)$	0,25
د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة	0,25
2- أ) بين أن: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n$ $(\forall n\geq 1)$	0,5
ب) استنتج بالسنتمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$	0,5
3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1}$ $(\forall n\geq 2)$ (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و 1- ج) و 2- أ))	0,75
ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$	0,5
4- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .	
نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_1=a$ و $v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n$ $(\forall n\geq 1)$	
و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $d_n=\lvert v_n-u_n\rvert$	
أ) بين أن: $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$ $(\forall n\geq 1)$	0,25
ب) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}d_n=+\infty$	0,5
ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .	0,25