امتحان تجريبي في الرياضيات
ماي 2012

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين 1

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط: $A(-2\,;-2{,}5\,;-4)$ و $B(4\,;4{,}5\,;-10)$ و $\Omega(6\,;7\,;-6)$

0.5 **1)** بيّن أنّ معادلة المستوى (P) واسط القطعة $[AB]$ هي: $6x+7y-6z-55=0$.

0.75 **2)** بيّن أنّ معادلة الفلكة (S) التي مركزها Ω و المماسّة ل (P) هي: $(x-6)^2+(y-7)^2+(z+6)^2=36$.

0.5 **3)** حدّد معادلة المستوى (R) الموازي للمستوى (P) و المماسّ أيضاً للفلكة (S).

0.5 **4)** نعتبر $N(a\,;b\,;c)$ نقطة من المستوى (P) بيّن أنّ $a^2+b^2+c^2\geq 25$.

0.5 **5)** أ) أحسب $d(\Omega\,,(\Delta))$، حيث (Δ) المستقيم المارّ من $C(5\,;7\,;-3)$ و الموجّه ب $\vec{u}(3\,;4\,;1)$.

0.75 **ب)** حدّد إحداثيات نقطتا تقاطع (Δ) و (S).

التمرين 2

يحتوي صندوق على 20 بطاقة تحمل كلّ واحدة منها سؤالاً. تتعلّق الأسئلة بمادّتي الرياضيات و الفيزياء و هي موزّعة كالتالي:

اثنا عشر بطاقة في الرياضيات: 8 أسئلة في الدوال و 4 أسئلة في الهندسة.

ثمان بطاقات في الفيزياء: 5 أسئلة في الميكانيك و 3 في الكيمياء.

يسحب مترشّح لمباراة معيّنة عشوائياً و في آن واحد بطاقتين من الصندوق (كلّ البطاقات غير قابلة للتمييز باللمس)

0.5 **1)** أحسب احتمال الحدث: A " سحب بطاقة في الدوال و بطاقة في الكيمياء"

0.75 **2)** إذا علمت أنّ البطاقتين المسحوبتين في مادة الرياضيات، ما هو احتمال أن تكونا في الهندسة ؟

3) نعتبر X المتغيّر العشوائي المرتبط بعدد المواد المسحوبة.

1 حدّد قيم X الممكنة و بيّن أنّ: $p(X=1)=\dfrac{47}{95}$ ثمّ استنتج قانون احتمال X.

التمرين 3

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B التي لحقاهما على التوالي: $a=6+2\sqrt{3}\,i$ و $b=6-2\sqrt{3}\,i$

0.5 **1)** حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-12z+48=0$.

0.5+0.5 **2)** أكتب العددين العقديين a و b على الشّكل المثلثي.

0.5 **3)** أكتب العدد العقدي $\dfrac{a}{b}$ على الشكل الجبري.

0.25 **4)** حدّد طبيعة المثلث OAB.

0.75 **5)** نعتبر النّقطة C التي لحقها $c=8$ بيّن أنّ B صورة A بالدوران $R(C,\dfrac{2\pi}{3})$.

0.5 **6)** أكتب التمثيل العقدي للإزاحة التي متّجهتها $\overrightarrow{AB}$.

التمرين 4

نعتبر التكاملين: $A=\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\,dx$ و $B=\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,dx$

0.5 **1)** بيّن باستعمال مكاملة بالأجزاء أنّ: $A=-B$ (ضع: $u'(x)=1$ و $v(x)=\sin(\ln x)$).

0.5 **2)** بيّن باستعمال مكاملة بالأجزاء أنّ: $B=-e^{\pi}-1+A$.

0.5 **3)** استنتج قيمة كلّ من A و B .

مسألـــة

الجزء الأوّل: نعتبر الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $h(x)=x+e^{-x}-1$.

0.5 **1)** أ) أحسب $h'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

0.25 **ب)** استنتج أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}: x+e^{-x}\geq 1$.

0.5 **2)** حدّد مساحة الحيّز المحصور بين C_h و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$.

0.5 **3)** تحقّق أنّ: $\forall x\geq 0: h(x)-x\leq 0$

4) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة ب: $u_0=1$ و $u_{n+1}=h(u_n)$.

0.5 أ) بيّن أنّ لكلّ n من $\mathbb{N}$: $0\leq u_n\leq 1$.

0.5 **ب)** بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية، يمكنك استعمال نتيجة السؤال 3).

0.5+0.25 **5)** استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثمّ حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الثّاني: نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=xe^x+1$.

0.5 **1)** أحسب $g'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

0.25 **2)** استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R}: xe^x+1>0$.

الجزء الثالث: نعتبر الدالة f المعرّفة بما يلي: $\boldsymbol{f(x)=2\ln(1+xe^x)}$.

0.25 **1)** تحقّق أنّ $D_f=\mathbb{R}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2) من الجزء الثاني)

0.25+0.5 **2)** أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة.

0.5 **3)** أ) تحقّق أنّ $f(x)=2x+2\ln(x+e^{-x})$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.

0.75 **ب)** حدّد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

0.5 **ج)** بيّن أنّ C_f يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجمياً في اتجاه مستقيم يتمّ تحديد معادلته.

0.5 **د)** أدرس الوضع النّسبي ل C_f مع المستقيم $(\Delta): y=2x$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1) ب) من الجزء الأول)

0.5 **4)** أ) بيّن أنّ $f'(x)=\frac{2e^x(x+1)}{1+xe^x}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.

0.5 **ب)** أدرس إشارة $f'(x)$ و ضع جدول التغيرات.

0.75 **5)** أنشئ C_f نأخذ $f(-1)\approx -1$