<table>
<tr><td colspan="2">مباراة توظيف أساتذة التعليم
التعليم الثانوي الإعدادي من الدرجة الثانية
- التخصص : الريـــــاضيـــــات
دورة يوليوز 2016</td><td colspan="2">ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵢⴰⵏ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني</td></tr>
<tr><td colspan="2">موضوع الاختبار الكتابي</td><td colspan="2">الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
الرباط – سلا - القنيطرة</td></tr>
<tr><td>الصفحة : 1 على 5</td><td>مدة الإنجاز : 5 ساعات</td><td>التاريخ: 01 يوليوز 2016</td><td>المادة: التخصص</td></tr>
</table>

Rappel de la notation

- Problème : 07 points
- Exercice 01 : 03,50 points
- Exercice 02 : 05,50 points
- Exercice 03 : 02,50 points
- Exercice 04 : 01,50 points

La présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage de la calculatrice, de tout matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

PROBLÈME

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation : « $e^x = x^n$ » que l'on note (E_n). A cet effet, on introduit la fonction f_n définie, par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$$

1) **Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2) :**

a)- Etudier et représenter sur $[0,+\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.

b)- Etudier l'existence des racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).

(On rappelle que : $2 < e < 3$)

2) **Etude des racines positives de l'équation (E_3) :**

a)- Etudier et représenter sur $[0,+\infty[$ la fonction f_3. On donne les valeurs approchées :

$$e^2 \approx 7,4 \quad ; \quad e^3 \approx 20,1 \quad ; \quad e^4 \approx 54,6 \quad ; \quad e^5 \approx 148,4$$

En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.

b)- Soit la suite définie par la relation : $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ avec y_0 est un nombre réel donné strictement supérieur à u.

- Montrer que si $u < y_0 \le v$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \le v$.
- Montrer que si $v \le y_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \le y_n$.
- Etudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
- En déduire selon la position de y_0 par rapport à v, la monotonie de la suite (y_n).

3) **Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \ge 3$:**

a)- Etudier sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

b)- Déterminer pour $n \ge 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n, la monotonie de la suite (u_n), puis prouver la convergence de celle-ci.

c)- Montrer que l'on a : $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, et en déduire la limite L de la suite (u_n), puis un équivalent simple de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

d)- Déterminer pour $n \ge 4$, le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_n, la monotonie de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

e)- On pose pour tout réel $x > 1$: $\quad g(x) = x - \ln x$

Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.

f)- Etablir que $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln n$, montrer à l'aide de g^{-1} que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$,

puis en déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 1

Considérons le problème (**P**) suivant :

(P) : « Trouver des triangles rectangles dont la longueur de l'hypoténuse ne dépasse pas 50 m »

On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1) Donner une solution particulière de l'équation (E).

Dans la suite du problème, (x, y, z) désigne une solution de (E) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

2) On note : $d = x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$.

a)- Montrer que d divise z.

b)- On pose : $x = dx'$; $y = dy'$; $z = dz'$. Montrer que $z' \wedge x' = 1$ et $z' \wedge y' = 1$

3) a)- Soient a et b deux entiers impairs. Montrer que : $a^2 + b^2 \equiv 2\ [4]$.

b)- En déduire que x' et y' sont de parités différentes. Quelle est la parité de z' ?

On suppose dans la suite que x' est pair et que y' est impair.

4) On pose : $x' = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$.

a)- Montrer qu'il existe deux entiers strictement positifs b et c tels que : $b + c = z'$ et $b - c = y'$.

En déduire que : $a^2 = bc$.

b)- Montrer que : $b \wedge c = 1$; en déduire qu'il existe deux entiers u et v dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$b = u^2 \quad \text{et} \quad c = v^2$$

c)- En déduire que :

$$x = 2duv \quad \text{et} \quad y = d\left(u^2 - v^2\right) \quad \text{et} \quad z = d\left(u^2 + v^2\right)$$

d)- Réciproquement, montrer que tout triplet (x, y, z) de la forme ci-dessus est solution de (E).

5) Donner trois solutions du problème (**P**).

EXERCICE 2

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On rappelle que

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau dont l'élément unité est : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Partie I :</u> On note $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A = \frac{1}{3}(M - I)$ puis vérifier que $A^2 = A$.

La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

2) Par convention, on note $M^0 = I$.

Démontrer qu'il existe une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ M^n = I + u_n.A \ \text{ avec : } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = -2u_n + 3$$

3) Calculer u_n en fonction de n puis donner l'expression de M^n en fonction de n.

Partie II : Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer J^2 ; en déduire que la matrice J n'est pas inversible dans $M_2(\mathbb{R})$.

2) On considère l'ensemble : $E = \{aI + bJ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

a)- Montrer que E est stable par la multiplication des matrices.

b)- Quels sont les éléments de E admettant dans E un inverse pour la multiplication ?

c)- Résoudre dans E les équations suivantes : $X^2 = I$ et $X^2 = X$

3) a)- Montrer que $M \in E$.

b)- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \left(1 - (-2)^n\right) J + (-2)^n I$

Partie III : L'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ est rapporté à la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad \vec{e}_2 = (1, 1, -1) \quad ; \quad \vec{e}_3 = (-2, 1, 1)$$

Soit j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est J.

1) Déterminer une forme réduite de J.

2) En déduire $\dim \operatorname{Im}(j)$ et $\dim \ker(j)$.

3) Donner une base de $\operatorname{Im}(j)$ ainsi qu'une base de $\ker(j)$.

4) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $u - j(u) = v(u)$ appartient à $\ker(j)$.

En déduire que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ s'écrit : $u = s + v$ avec $s \in \operatorname{Im}(j)$ et $v \in \ker(j)$

5) Vérifier que $\operatorname{Im}(j) \cap \ker(j) = \{0\}$ et en déduire l'unicité du couple (s, v).

EXERCICE 3

Soit f_0 la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f_0(x) = e^{-3x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) Calculer u_0.

2) a)- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 0$

b)- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) a)- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

b)- Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) a)- Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n+1}{3} u_n$

b)- En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.

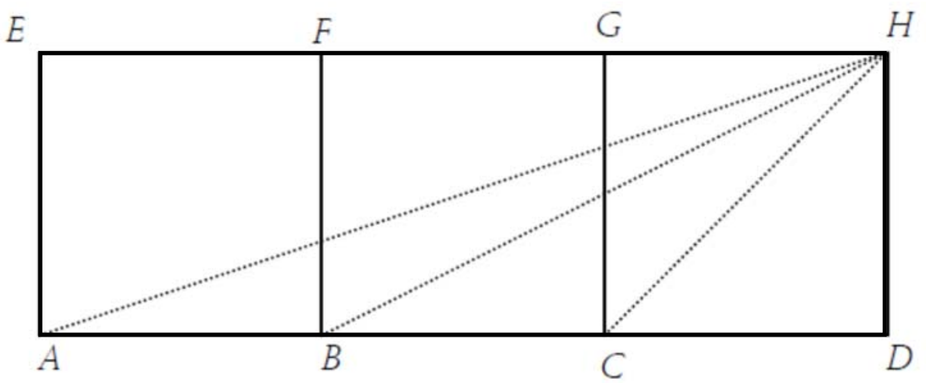
5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}$

a)- Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

b)- Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$

EXERCICE 4

On se donne trois carrés accolés de côté 1 comme sur la figure suivante :



On pose : $\widehat{HAD} = \arctan(a)$ et $\widehat{HBC} = \arctan(b)$

1) Déterminer les valeurs numériques de a et b.

2) Monter que les triangles AFH et HCB sont semblables.

3) Déduire de ce qui précède que : $\widehat{CBH} = \widehat{AHF}$ et que : $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

FIN DE L'ÈPREUVE