093

أحسب التّكاملات التّالية:

$a=\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ ، $b=\int_0^3 |x-2|\,dx$ ، $c=\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$

$d=\int_2^3 \dfrac{x+1}{x^3}\,dx$ ، $e=\int_1^2 \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}\,dx$ ، $f=\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$g=\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx$ ، $h=\int_0^1 (\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3})\,dx$ ، $i=\int_{-2}^{-1} (x^2+\dfrac{1}{x^2})\,dx$

$j=\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ ، $k=\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\,dx$ ، $\ell=\int_1^2 \dfrac{\ln(x)}{x}\,dx$

$m=\int_0^1 (t^2-2t^6)\,dt$ ، $n=\int_0^1 x\cdot(x^2+1)^7\,dx$ ، $o=\int_0^1 (e^x-e^{-x})\,dx$

094

أسئلة هذا التمرين مستقلة

1) بيّن أنّ: $\dfrac{1}{t(t+1)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}$ و أحسب $I=\int_1^e \dfrac{1}{t(t+1)}\,dt$. **بالتوفيق**

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $K=\int_1^e \dfrac{1}{(x+1)^2}\ln x\,dx$.

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $\int_1^e (\ln x)\,dx$ ثمّ $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.

4) تحقّق أنّ: $\dfrac{t^3}{t^2+1}=t-\dfrac{t}{t^2+1}$ و استنتج حساب التّكامل $I=\int_0^1 \dfrac{t^3}{t^2+1}\,dt$.

5) تحقّق أنّ $\sqrt{2}\le\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx\le 3$.

6) باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ $\int_{-1}^0 (2-x)e^x\,dx=3-\dfrac{4}{e}$.

7) أ) تحقّق أنّ $\dfrac{x^3+x}{x+1}=x^2-x+2-\dfrac{2}{x+1}$

ب) حدّد بمكاملة بالأجزاء: $\int_0^1 (3x^2+1)\ln(x+1)\,dx$.

095

1) أ) أعط دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f: x\mapsto x^3$. **(بكالوريا وطنية 2008)**

ب) أحسب التكامل $I=\int_1^2 x^3\,dx$.

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب التكامل $J=\int_1^2 x^3\ln x\,dx$.

096

1) لتكن $g(x)=\ln(x+e^{-x})$ ، أحسب $g'(x)$.

2) نضع: $I=\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\,dx$ ، بيّن أنّ: $I=-1+\ln(1+e)$.

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $\int_0^1 4xe^{2x}\,dx$

097

لتكن: $u(x)=\ln(\dfrac{x}{x+1})$ $x\in[1\,,+\infty[$

1) أحسب $u'(x)$. **(مكناس 2000 / 2001)**

2) استنتج بدلالة α ، حساب التّكامل: $I(\alpha)=\int_1^\alpha \dfrac{\ln x-\ln(x+1)}{x(x+1)}\,dx$; $\alpha>1$

3) أحسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

098

لتكن $f(x)=(x-1)e^x+1$.

1) بيّن أنّ: $F(x)=(x-2)e^x+x$ دالة أصلية ل f على $\mathbb{R}$.

2) استنتج مساحة الحيّز بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

099

(بكالوريا وطنية 2011 د س)

نعتبر الدالة $h(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}$ المعرّفة على $]1,+\infty[$.

تحقّق أنّ: $h(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ و استنتج $\int_2^3 h(x)\,dx$.

100

(بكالوريا وطنية 2004)

حدّد الدالة المشتقّة ل $f(x)=\ln(x^2+1)$ ثمّ أحسب $I=\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^2}\ln(1+x^2)\,dx$

101

<u>تتمة التمرين **068** بكالوريا مكناس 1999 / 2000</u>

6) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $J=\int_1^2 x^2\ln x\,dx$.

ب) حدّد ب cm^2 مساحة الحيّز المستوي المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=2$ ، الوحدة $2cm$.

<u>تتمة التمرين **069** بكالوريا وطنية 2003 د س</u>

5) أحسب مساحة الحيّز المحصور بين C_f و (D) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.

<u>تتمة التمرين **070** بكالوريا وطنية اقتصاد 2007 د ع</u>

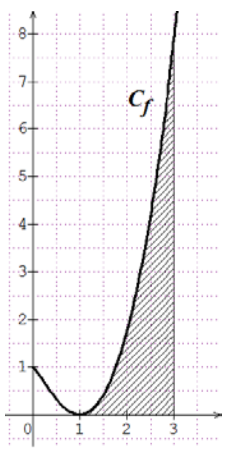
4) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب: $\int_1^e \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ ثمّ استنتج A مساحة الحيّز المحصور ب C_f و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

<u>تتمة التمرين 071 بكالوريا وطنية 2010 د ع</u>

3) في الشكل C_f على المجال $]0,3[$.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أنّ $\int_1^3 x^2\ln x\,dx=9\ln 3-\dfrac{26}{9}$.

ب) استنتج مساحة حيّز المستوى المخدّش.



<u>تتمة التمرين **075** بكالوريا وطنية 2007 د س</u>

5) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $J=\int_1^3 x^2\ln x\,dx$.

ب) حدّد مساحة الحيّز المستوي المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $x=1$ و $x=3$.

102

(بكالوريا وطنية 2005 د – س)

1) نعتبر التكاملين: $I=\int_{\ln 4}^{\ln 5}\frac{e^x}{e^x-3}dx$ و $J=\int_{\ln 4}^{\ln 5}\frac{1}{e^x-3}dx$.

بيّن أنّ: $I-3J=\ln(\frac{5}{4})$ و أحسب I ثمّ استنتج J .

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب: $K=\int_0^1 (x-1)e^x dx$.

103

(بكالوريا وطنية اقتصاد 2006 د ع)

نضع $I=\int_0^1 \frac{t^3}{1+t}dt$ و $J=\int_0^1 t^2\ln(1+t)\,dt$.

1) بيّن أنّ لكلّ t من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ، $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$ ثمّ أحسب I .

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب J .

104

(بكالوريا وطنية 2010 د س)

1) أ) تحقّق أنّ: $\forall x\in\mathbb{R}: \frac{(x+1)^2}{x^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}$.

ب) استنتج حساب التكامل: $\int_0^1\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$.

2) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب: $\int_0^1 xe^x\,dx$.

ب) استنتج حساب التكامل: $\int_0^1 (x-e^{-2x})e^x\,dx$.

بالتوفيق

105

(بكالوريا وطنية 2003)

1) أحسب التكاملين: $\int_0^1(x^2+5x-12)\,dx$ و $\int_1^2\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

2) بيّن أنّ: $\frac{4e^x-5}{e^x-1}=5-\frac{e^x}{e^x-1}$ و أحسب التكامل $\int_1^2\frac{4e^x-5}{e^x-1}dx$.

106

نعتبر الدالة: $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$

1) أ) أوجد الأعداد a و b و c بحيث $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

ب) أعط دالة أصلية للدالة f على $]1,+\infty[$. (بكالوريا وطنية 2004 د – س)

2) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب : $\int_1^e x\ln x\,dx$.

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء استنتج: $\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$.

107

لتكن $h(x)=\frac{1-x^2}{x(x^2-x+1)}$

تحقّق أنّ $h(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ و أحسب $I=\int_1^2 h(x)\,dx$.

108

نعتبر المتتالية: $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$ حيث $n\ge1$.

1) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ تزايدية.

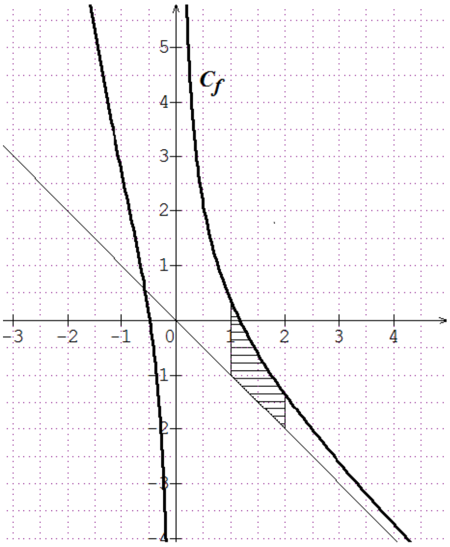
2) بيّن أنّ $u_n\le1$: $\forall n\ge1$. ماذا تستنتج ؟

3) أ) تحقّق أنّ $\forall n\ge1:\ 1-u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

ب) استنتج أنّ $\forall n\ge1:\ 0\le1-u_n\le\frac{1}{n+1}$ و حدّد $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

109

(بكالوريا وطنية 2009 د – ع)



f دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$. و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

علماً أنّ:

C_f يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

محور الأراتيب مقارباً عمودياً.

$(\Delta): y=-x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

من خلال قراءتك للمبيان:

1) أ) حدّد النهايات التالية: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$.

ب) أعط جدول جدول تغيّرات الدالة f على مجموعة تعريفها.

ج) أعط إشارة $(f(x)+x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

د) أعط عدد حلول المعادلة $f(x)=-x$ على $\mathbb{R}^*$.

2) أحسب مساحة الحيّز المخدّش في المبيان إذا علمت أنّ $f(x)=e^{-x}-x+\frac{1}{x}$.

110

1) حدّد الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$

و بيّن أنّ $\int_1^{\sqrt{2}}2x(x^2-1)^{2009}dx=\frac{1}{2010}$.

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بيّن أنّ: $\int_0^2(2x+1)\ln(x+1)\,dx=6\ln3-2$.

111

نضع $F(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

1) أحسب $F'(x)$ واستنتج $I=\int_1^2 \ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\,dx$.

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{x^3+2x^2+x}{x+1}=x^2+x$. (بكالوريا وطنية اقتصاد 2007 د س)

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب $J=\int_0^1(3x^2+4x+1)\ln(1+x)\,dx$.

112

1) حدّد دالة أصلية للدالة $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$ على $\mathbb{R}$.

2) حدّد a و b بحيث: $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+1}$.

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $I=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$.

113

$f(x)=x\cdot e^{(-\frac{x^2}{2}+1)}\ ;\ x\le0$ و C_f منحناها في م م م، $\|\vec{i}\|=3cm$

حدّد ب cm^2 ، مساحة السطح المستوي المحصور ب C_f و مِحورَي المعلم و المستقيم $x=-1$.